Fyzikálna olympiáda
54. ročník, 2012/2013
školské kolo
kategória D
Riešenie úloh

1. *Zvislý vrh*

a) Pre výšku h guľôčky nad miestom hodu v čase t platí

$h = v_0\, t - (1/2)\, g\, t^2$.

Pre čas t, v ktorom sa guľôčka nachádza vo výške h, z tejto kvadratickej rovnice dostaneme

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}. \qquad (2\ \text{b})$$

Pre rozdiel časov t_1, t_2 máme

$$\tau = t_1 - t_2 = \frac{2}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gh}. \qquad (2\text{b})$$

Z tejto rovnice určíme začiatočnú rýchlosť guľôčky

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{g\tau}{2}\right)^2 + 2gh}\ . \qquad (2\text{b})$$

Pre dané hodnoty dostávame $v_0 \approx 21\ \text{m.s}^{-1}$

b) Pre maximálnu výšku guľôčky platí

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = h + \frac{g\tau^2}{4}\ . \qquad (2\text{b})$$

Pre dané hodnoty dostávame, $h_{\max} \approx 23$ m. (2b)

2. *Curling*

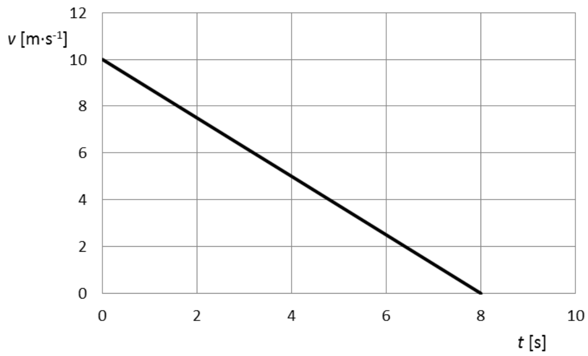
a) Keďže ide o pohyb s konštantným zrýchlením, sú jednotlivé funkcie

$v = \mathrm{f}_1(t) = v_0 + at$,

$a = \mathrm{f}_2(t) = \text{konšt.}$,

$$s = \mathrm{f}_3(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \qquad (1{,}5\text{b})$$

b) Pre dané hodnoty veličín $v_0 = 10\ \text{m·s}^{-1}$ a zrýchlenie na celej trajektórii $a = (v_8 - v_0) / t_8 = -1{,}25\ \text{m·s}^{-2}$ dostaneme graf $v = \mathrm{f}_1(t)$.



Obr. RD−1

(1b)

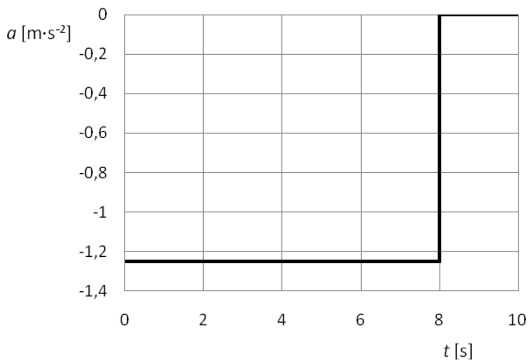
c) Keďže rýchlosť klesá rovnomerne, možno určiť priemernú rýchlosť ako priemernú hodnotu zo začiatočnej a konečnej rýchlosti $v_s = (v_0 - v_8)/t_8 = v_0 / t_8$,
pre dané hodnoty $v_s = 5{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (1b)

d) Za čas $t_5 = 5{,}0$ s spomalil kameň z rýchlosti v_0 na rýchlosť v_5. Zrýchlenie bude teda záporné

$$a = \frac{\Delta v_5}{\Delta t_5} = \frac{v_5 - v_0}{\Delta t_5}\text{, pre porovnanie } a = \frac{\Delta v_8}{\Delta t_8} = \frac{v_8 - v_0}{\Delta t_8} = -\frac{v_0}{t_8}.$$

Pre dané hodnoty $a = -\,1{,}25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (1b)

e) Graf $a = f_2(t)$ (1b)

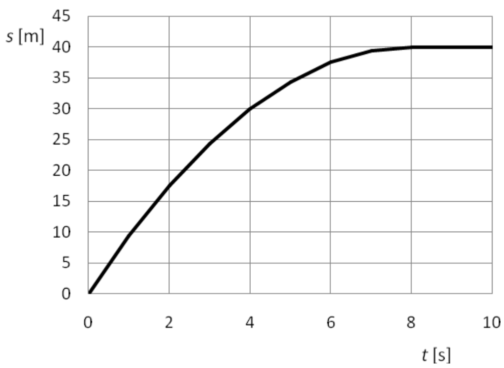


Obr. RD−2

f) Pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu do zastavenia platí

$$s = -\frac{v_0^{\,2}}{2a}\text{, pre dané hodnoty } s = 40{,}0\text{ m.}$$ (1b)

g) Graf s = $f_3(t)$. (1b)



Obr. RD−3

h) Pre dráhu $s(t)$ a rýchlosť $v(t)$ rovnomerne zrýchleného pohybu platí

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 , \; v(t) = v_0 + at .$$

Hľadáme čas t_1 pre ktorý platí $s(t_1) = s_1$, t.j.

$$s_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^{\,2} , \text{ resp. } \; t_1^{\,2} + 2\frac{v_0}{a} t_1 - \frac{2s_1}{a} = 0.$$

Riešime kvadratickú rovnicu s neznámou t_1 , ktorá má riešenia

$$t_1 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^{\,2} + 2 a s_1}}{a} .$$

Keďže sa kameň zastaví a zostane stáť, má fyzikálny význam iba menšie z oboch kladných riešení, teda zmysel má iba riešenie so záporným znamienkom (druhé riešenie by zodpovedalo prechodu súradnicou $x = s_1$ pri ceste nazad s daným zrýchlením)

$$t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^{\,2} + 2 a s_1}}{a} . \qquad (1{,}5 \text{ b})$$

Rýchlosť v tomto čase bude

$$v_1 = v_0 + at_1 = \sqrt{v_0^2 + 2 a s_1} .$$

Pre dané hodnoty veličín $v_1 \approx 7{,}1 \text{ m·s}^{-1}$.

Z grafu môžeme približne potvrdiť túto hodnotu. (1b)

3. *Prestrelenie dosky*

a) Zmena kinetickej energie strely je rovná práci ktorú vykonala sila odporu prostredia pri preniknutí strely do dosky

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -F H , \qquad (3\text{b})$$

kde m je hmotnosť strely a F veľkosť odporovej sily dosky.

Ak strela preletí doskou s hrúbkou h a vyletí z nej rýchlosťou v, platí

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v^2 = Fh . \qquad (2\text{b})$$

Z oboch výrazov máme

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{h}{H}} . \qquad (2\text{b})$$

Pre $h = H/3$ dostaneme $v = v_0\sqrt{(2/3)} \approx 490 \text{ m·s}^{-1}$. (1b)

b) Ak má strela vyletieť rýchlosťou $v_1 = v_0/2$, musí mať doska hrúbku h_1, pričom platí

$$\frac{v_0}{2} = v_0 \sqrt{1 - \frac{h_1}{H}} , \qquad (1\text{b})$$

odkiaľ $h_1 = 3H/4 = 9{,}0$ cm. (1b)

4. *Brzdy na aute*

a) Keďže sila F sa prenáša na piest prostredníctvom páky a obe sily sú kolmé na os páky, platí $F_1 x = F(x+y)$, tzn.

$$F_1 = \frac{x+y}{x} F \text{ , pre dané hodnoty } F_1 \approx 288 \text{ N.} \qquad (1b)$$

b) V systéme vzniká tlak

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{4F_1}{\pi d^2} \text{ , pre dané hodnoty } p_1 \approx 916 \text{ kPa.} \qquad (2b)$$

c) Brzdový piest tlačí na brzdové platničky silou

$$F_2 = p_1 S_2 = F_1 \left(\frac{D}{d}\right)^2 = F\left(\frac{x+y}{x}\right)\left(\frac{D}{d}\right)^2 \text{, pre dané hodnoty } F_2 \approx 647 \text{ N.} \qquad (2b)$$

d) Počas brzdenia tlačia obe platničky na kotúč silou F_2 (kvôli podmienke, že tlak na oboch stranách kotúča je rovnaký). Vzniká trecia brzdná sila v smere dotyčnice ku kotúču a má veľkosť

$$T = 2\, f\, F_2 . \qquad (1b)$$

Táto tlaková sila je rozložená približne rovnomerne po celej ploche platničiek. Keďže sú rozmery platničiek zanedbateľné voči rozmerom kotúča, môžeme uvažovať, že sila T pôsobí vo vzdialenosti R od osi kotúča. Potom pre brzdný moment platí

$$M = R\,T = 2\, f\, R\, F \left(\frac{x+y}{x}\right)\left(\frac{D}{d}\right)^2 \text{, pre dané hodnoty } M \approx 51{,}8 \text{ N·m.} \qquad (1 b)$$

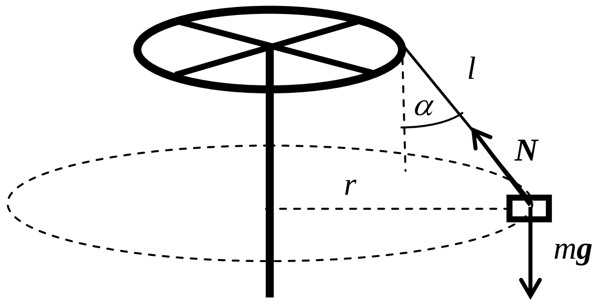
Tento výpočet je približný, lebo trecia sila pôsobí na kotúč v rozličných vzdialenostiach od osi kotúča, čo sme vo výpočte nezohľadnili. (1b)

e) Tlak p_1 je rovnaký v celom hydraulickom systéme. Vodič preto pôsobí na brzdový pedál vždy rovnakou silou F nezávislou od počtu brzdových piestov. (1b)

f) Všetka kinetická energia automobilu sa zmenila na teplo v brzdách

$$Q = E_k = \frac{1}{2} m v_0{}^2 \text{ , pre dané hodnoty } Q \approx 313 \text{ kJ.} \qquad (1b)$$

5. Kolotoč



Obr. RD-4

a) Sedačka kolotoča sa pohybuje po kružnici s polomerom $r = R + l\sin\alpha$ s dostredivým zrýchlením $a_\mathrm{d} = \omega^2 r = \omega^2\left(R + l\sin\alpha\right)$.

Na sedačku pôsobí tiažová sila $m\,\boldsymbol{g}$, kde m je hmotnosť sedačky spolu s pasažierom a sila $\boldsymbol{N}$ napínajúca záves. Pre priemety pôsobiacich síl do zvislého a vodorovného smeru platí

$$N\sin\alpha = m\omega^2\left(R + l\sin\alpha\right)$$

$$N\cos\alpha = m\,g\,. \qquad \text{(2 b)}$$

Delením prvej z týchto rovníc druhou dostaneme

$$\tan\,\alpha = \frac{\omega^2\left(R + l\sin\alpha\right)}{g}, \qquad \text{(1 b)}$$

odkiaľ vyjadríme uhlovú rýchlosť ω sedačky

$$\omega = \sqrt{\frac{g\;\;tg\,\alpha}{R + l\sin\alpha}}\,. \qquad \text{(2 b)}$$

Pre frekvenciu sedačky potom platí

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\;\;tg\alpha}{R + l\sin\alpha}}\;\;,$$

pre dané hodnoty veličín $f \approx 0{,}200$ Hz. (1 b)

b) Obvodová rýchlosť sedačky potom je

$$v = \omega r = \sqrt{g\;\;\tan\alpha\left(R + l\sin\alpha\right)}\,.$$

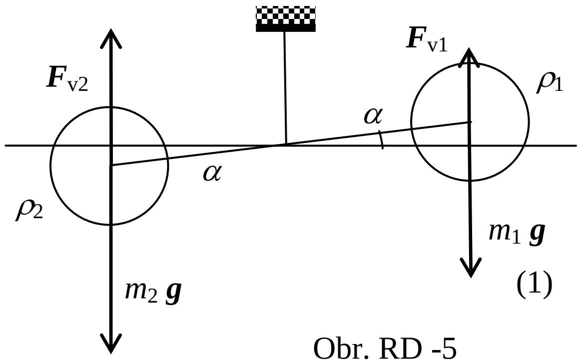
Pre dané hodnoty veličín $v \approx 4{,}29\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 15{,}4\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. (2 b)

c) Počet otáčok kolotoča v ustálenom stave bude

$$n = \frac{v\,t}{2\pi\,r} = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g\;\;\tan\alpha}{R + l\sin\alpha}}\;\;.$$

Pre dané hodnoty veličín $n = 12$. (2 b)

6. Rovnováha



Obr. RD -5

a) Na 1. guľu pôsobí gravitačná sila $m_1\boldsymbol{g}$ a vztlaková sila $\boldsymbol{F}_{v1}$, na 2. guľu gravitačná sila $m_2\boldsymbol{g}$ a vztlaková sila $\boldsymbol{F}_{v2}$.
Pre veľkosti týchto síl platí

$m_1 g = \rho_1 g\, V$, $m_2\, g = \rho_2\, g\, V$,

$F_{v1} = \rho_0\, g\, V / 3$, $F_{v2} = 2\rho_0\, g\, V / 3$. (1) (1) (2 b)

V rovnováhe zviera tyčka s hladinou kvapaliny uhol α. a momenty síl vzhľadom na stred tyčky sú rovnaké

$$\left(m_1 g - F_{v1}\right)\left(x + r\right)\sin\alpha = \left(m_2 g - F_{v2}\right)\left(x + r\right)\sin\alpha\,. \qquad (2) \qquad (2\text{ b})$$

Po dosadení síl (1) do rovnosti (2) máme

$$\left(\rho_1 gV - \frac{\rho_0 gV}{3}\right)\left(x + r\right)\sin\alpha = \left(\rho_2 gV - \frac{2\rho_0 gV}{3}\right)\left(x + r\right)\sin\alpha\,. \qquad (1\text{ b})$$

Úpravou dostaneme neznámu hustotu 2. telesa

$$\rho_2 = \rho_1 + \frac{1}{3}\rho_0\,. \qquad (1\text{ b})$$

Pre dané hodnoty je $\rho_2 \approx 3\,033\ \text{kg.m}^{-3}$. (1 b)

b) Na záves pôsobí smerom nadol výsledná sila s veľkosťou

$$F = \left(m_1 g - F_{v1}\right) + \left(m_2 g - F_{v2}\right) = Vg\left(\rho_1 + \rho_2 - \rho_0\right) = 2Vg\left(\rho_1 - \frac{\rho_0}{3}\right). \qquad (2\text{ b})$$

Pre dané hodnoty veličín $F \approx 46{,}4$ N. (1 b)

7. Meranie pružných vlastností gumičky (10 b)

Fyzikálna olympiáda, 54. ročník– Úlohy školského kola kategórie D

Autori úloh: Ľubomír Konrád (1, 2, 3, 5, 6), Dušan Nemec (2, 4, 7)
Recenzia: Daniel Kluvanec, Ivo Čáp
Redakčná úprava: Ľubomír Konrád
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012