FYZIKÁLNA OLYMPIÁDA

53. ročník, 2011/2012

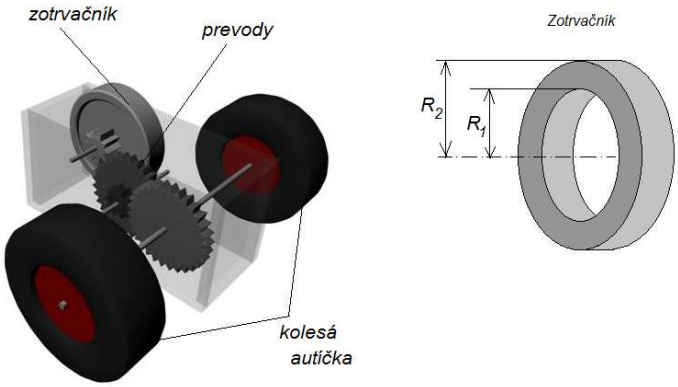
školské kolo

kategória B

zadanie úloh

1. Autíčko na zotrvačník

V súvislosti so znižovaním energetickej náročnosti áut sa zvažuje možnosť ich pohonu zotrvačníkom. Obľúbenou detskou hračkou je autíčko na zotrvačník. Autíčko stačí uviesť rukou do pohybu a ono potom ďalej pohybuje zotrvačnosťou. Zotrvačník autíčka má obvykle tvar kolesa, ktoré je ozubenými prevodmi spojené s hnacími kolesami autíčka (pozri obrázok B–1).



Obr. B–1

a) Určte moment zotrvačnosti I_z zotrvačníka vzhľadom na jeho os otáčania.

b) Autíčku udelíme začiatočnú rýchlosť v_0 = 0,50 m·s^{-1}. Určte otáčky N_{z0}zotrvačníka a pomer kinetickej energie E_{kz1}zotrvačníka a celkovej kinetickej energie E_{k1}autíčka.v tomto prípade.

c) Určte dojazd (dráhu) d_1 autíčka po vodorovnej podlahe a čas t_1 pohybu autíčka do jeho zastavenia?

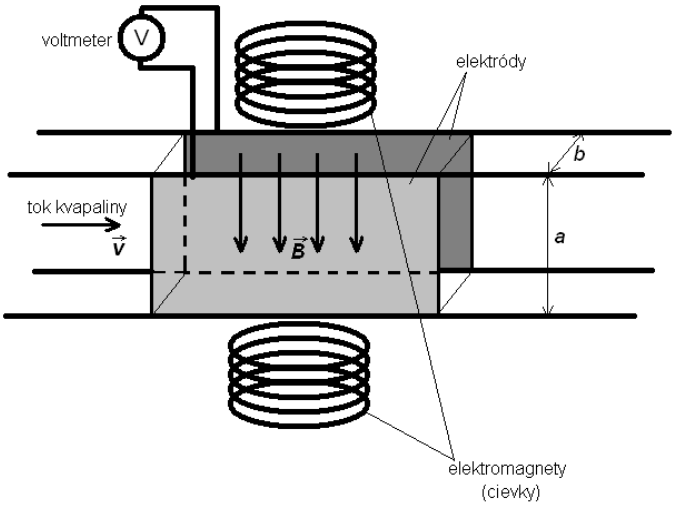
d) V autíčku sa pokazili prevody a vypadlo jedno ozubené koliesko, takže zotrvačník prestal byť spojený s kolesami. Určte dojazd d_2 autíčka po vodorovnej podlahe v tomto prípade, ak mu udelíme začiatočnú rýchlosť v_0.
Vypočítajte pomer začiatočnej kinetickej energie E_{k1} v úlohe b) a začiatočnej kinetickej energie E_{k2} pokazeného autíčka roztlačeného na rovnakú rýchlosť. Všetky úlohy riešte najprv všeobecne.

Vnútorný a vonkajší polomer zotrvačníka (obr. B–1) R_1 = 15 mm, R_2 = 20 mm. Hmotnosť homogénneho zotrvačníka m_z = 50 g . Všetky štyri hnacie kolesá autíčka sú rovnaké. Považujte ich za homogénne valce s hmotnosťou m_k = 20 g a polomerom R_k = 25 mm. Prevodový pomer medzi otáčkami zotrvačníka a otáčkami kolies p = 10 : 1. Celé autíčko má hmotnosť M = 200 g. Rameno valivého odporu kolies autíčka ξ = 1,5 mm. Moment zotrvačnosti prevodov ako aj trenie v prevodoch sú zanedbateľné. Kolesá autíčka po podlahe pri pohybe neprešmykujú.

Pomôcka: Moment zotrvačnosti homogénneho valca s hmotnosťou m a polomerom r vzhľadom na jeho os je $I = (1/2)\, mr^2$. Valivý odpor kolesa s polomerom r na vodorovnej podložke je daný odporovou silou $F_o = (\xi/r)\, F_n$, kde F_n prítlačná sila kolesa k podložke. Pri riešení časti a) sa odporúča vyjadriť moment zotrvačnosti valca pomocou hustoty a polomeru a medzikružie považovať za valec, z ktorého je vyrezaný menší valec.

2. Elektromagnetický prietokomer

Na meranie prietoku vodivých kvapalín sa často používa elektromagnetický merač prietoku. Konštrukcia prietokomera je znázornená na obr. B–2. Kvapalina prechádza nevodivým potrubím s obdĺžnikovým prierezom so stranami *a* a *b*, ktoré sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s magnetickou indukciou ***B*** kolmou na smer prúdenia kvapaliny a kolmou na stenu potrubia so šírkou *b*. Na stenách potrubia rovnobežných s vektorom magnetickej indukcie sú proti sebe umiestnené dve rovnaké obdĺžnikové elektródy, každá s plochou *S*. Citlivý voltmeter s vnútorným odporom *R* meria elektrické napätie *U* medzi týmito dvomi elektródami.



Obr. B–2

a) Vysvetlite, prečo vzniká pri prúdení elektricky vodivej kvapaliny v potrubí medzi elektródami elektrické napätie.
b) Dokážte, že objemový prietok *Q* kvapaliny v potrubí možno vyjadriť vzťahom $Q = k\, U$, kde *k* je konštanta. Odvoďte vzťah pre vyjadrenie konštanty *k* pomocou zadaných veličín.

Určte náboj, na elektródach prietokomera. *Pozn.: Sústavu elektród považujte za rovinný kondenzátor.* Niekedy sa v prietokomere namiesto konštantného magnetického poľa používa striedavé magnetické pole s frekvenciou *f* a amplitúdou B_m.

c) Určte efektívnu hodnotu napätia U_{ef} medzi elektródami. Dokážte, že pre prietok kvapaliny platí vzťah $Q = k^*\, U_{ef}$. Určte konštantu k^*.
d) Určte elektrický prúd I_{ef} prechádzajúc medzi elektródami prietokomera, ak je k elektródam pripojený voltmeter s veľmi vysokým vnútorným odporom *R*

(predpokladajte $R \to \infty$). Vysvetlite, prečo sa prúd medzi elektródami nerovná prúdu prechádzajúcim voltmetrom?

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty: a = 50 mm, b = 30 mm, S = 40 cm^2, B = 1,5 T, B_m = 1,5 T, ε_r = 81, ε_0 = 8,86·10^{-12} F·m^{-1}, f = 1,0 kHz. Pre zjednodušenie považujte rýchlosť prúdenia kvapaliny rovnakú v celom priereze potrubia prietokomera.

3. Balónik

Keď nafúkame gumený balónik a uvoľníme ho, začne poletovať po miestnosti. Uvažujte nafúkaný balónik guľového tvaru s polomerom r = 10 cm a priemerom otvoru d = 10 mm. Balónik je naplnený vzduchom s pretlakom Δp = 10 kPa. Atmosférický tlak je p_a = 1,0·10^5 Pa. Molová hmotnosť vzduchu M_m = 29·10^{-3} kg·mol^{-1}, Poissonova konštanta pre vzduch je κ = 1,4 a všeobecná plynová konštanta R = 8,31 J·K^{-1}·mol^{-1}. Deje v plyne považujte za adiabatické.

a) Vypočítajte hustotu ρ_1 vzduchu vo vnútri nafúknutého balónika, ak je teplota vzduchu vo vnútri balónika t_0 = 20 °C. Aká je hustota ρ_v okolitého vzduchu (pri rovnakej teplote t_0)?

b) Určte hustotu ρ_2 vzduchu vytekajúceho z balónika a expandujúceho na vonkajší tlak $p_2 = p_a$ ako funkciu pretlaku Δp a hustoty ρ_1 vzduchu vo vnútri balónika.

c) Napíšte rovnicu vyjadrujúcu zákon zachovania energie pre výtok vzduchu z balónika. Určte začiatočnú výtokovú rýchlosť v_0 vzduchu z balónika. Predpokladajte, že sa vzduch vo vnútri balónika nepohybuje.

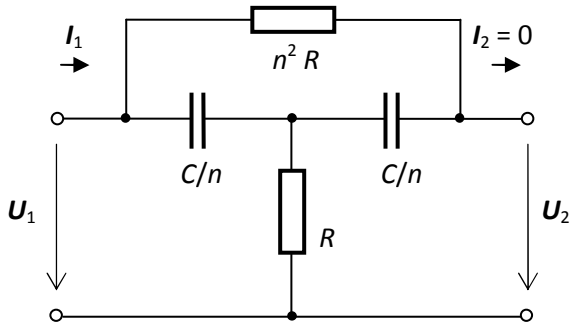
d) Odhadnite rýchlosť u_0 pohybu balónika pri jeho vodorovnom lete, ak vzduch vyteká z otvoru rýchlosťou v_0.

Pozn.: Pre aerodynamickú odporovú silu pôsobiacu na guľu platí vzťah : $F_o = \frac{1}{2} c S \rho_v v^2$, *kde c je súčiniteľ odporu (pre guľu je c = 0,45), S je obsah priemetu gule do roviny kolmej na smer jej pohybu vzhľadom na okolie,* ρ_v *je hustota okolitého vzduchu, v je veľkosť rýchlosti gule vzhľadom na vzduch.*

V prípade plynu, ktorý mení svoju teplotu a hustotu pri laminárnom prúdení energiu plynu s hmotnosťou m vyjadríme vzťahom $E = \frac{1}{2} m v^2 + m g h + pV + E_{vn}$, *kde jednotlivé členy zodpovedajú energii kinetickej, potenciálnej, tlakovej a vnútornej.*

4. Elektrický frekvenčný filter

V elektrických obvodoch sa z praktického hľadiska často nahrádzajú induktory rezistormi a kapacitormi, ktoré sa dajú ľahšie realizovať ako miniatúrne súčiastky. Úzkopásmový frekvenčný filter sa realizuje zvyčajne ako RLC obvod. Podobné vlastnosti má RC obvod so schémou na obr. B–3. Základné parametre obvodu sú kapacita C a odpor R. Vlastnosti obvodu možno modifikovať parametrom $n > 0$.



Obr. B–3

Predpokladajte, že na vstup filtra je pripojený striedavý zdroj s efektívnym napätím U_1 a nastaviteľnou uhlovou frekvenciou ω. Na výstup je pripojený voltmeter s vysokým vstupným odporom, ktorý meria efektívnu hodnotu U_2 výstupného napätia filtra.

a) Odvoďte vzťahy pre absolútnu hodnotu Z_1 a argument φ_1 vstupnej impedancie filtra, ktoré sa definujú pomerom $\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{U}_1 / \boldsymbol{I}_1$ ($\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{I}_1$ sú komplexné –vstupné veličiny filtra). Zostrojte grafy závislosti veličín Z_1 a φ_1 od uhlovej frekvencie ω pre dané hodnoty veličín.

b) Odvoďte vzťahy pre absolútnu hodnotu A a argument φ_2 napäťového prenosu filtra, ktoré sú definované vzťahom $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_2 / \boldsymbol{U}_1$.

c) Zostrojte grafy závislosti veličín A a φ_2 od uhlovej frekvencie ω pre dané hodnoty veličín. Pomocou grafu ukážte, že filter potláča určité pásmo frekvencií a preto sa nazýva „pásmová zádrž“.

d) Odvoďte vzťahy pre uhlovú frekvenciu ω_0, pri ktorej dochádza k maximálnemu potlačeniu signálu; faktor potlačenia $a_0 = A_{min}/A_{max}$, kde A_{max} a A_{min} sú maximálna a minimálna hodnota napäťového prenosu; a šírku pásma potlačenia signálu $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, kde uhlové frekvencie ω_1 a ω_2 predstavujú krajné hodnoty pásma, pri ktorých je potlačenie signálu $a_{1,2} = A_{1,2}/A_{max} = 1/\sqrt{2}$ (pokles o 3 dB). Ukážte, ako sa menia uvedené hodnoty so zmenou parametra n.

Úlohu riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty $RC = 1{,}0\ \mathrm{rad}^{-1}\cdot\mathrm{s}$ a dve rôzne hodnoty $n_1 = 1$ a $n_2 = 10$. Grafy zostrojte pre interval uhlovej frekvencie $(0{,}10 \div 10)\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Na osi uhlovej frekvencie zvoľte logaritmickú stupnicu.

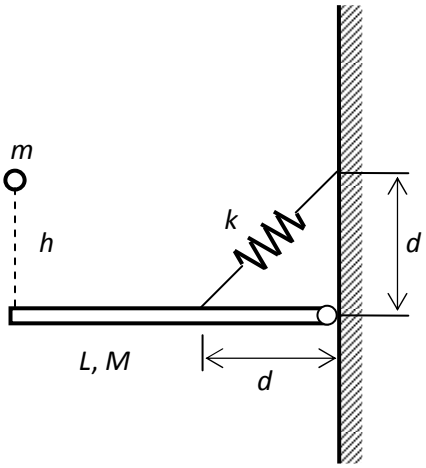
Pozn.: Pred riešením úlohy preštudujte riešenie striedavých elektrických obvodov pomocou komplexných veličín. Odporúčame preštudovať riešenie podobných úloh v zbierke úloh „Fyzika v zaujímavých riešených úlohách I a II“ (http://fo.uniza.sk).

5. Kmity dosky

Vodorovná doska s dĺžkou L a hmotnosťou M je pomocou kĺbu pripevnená k zvislej stene a vo vodorovnej polohe udržiavaná pružinou s tuhosťou k, obr. B – 4. Na koniec dosky dopadne z výšky h loptička s hmotnosťou $m << M$ a dokonale pružne sa od nej odrazí. Po náraze loptičky začne doska kmitať.

a) Určte maximálnu výchylku α_m dosky z vodorovnej polohy po náraze loptičky.

b) Určte periódu T kmitov dosky okolo rovnovážnej polohy po náraze loptičky.



Obr. B – 4

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty:
M = 1,0 kg, L = 30 cm, k = 4,2 N·cm^{-1}, d = 10 cm,
h = 25 cm, m = 15 g.

Pri všeobecnom riešení predpokladajte, že platí $\alpha_m << 1$ rad. Pri úpravách použite približné vzťahy $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ pre $x << 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$ a $\cos\varphi \approx 1$ pre $\varphi << 1$ rad.

6. Elektróny v kondenzátore

Elektrický kondenzátor tvoria dve rovnobežné medené platne s obsahom S = 10 cm^2, hrúbkou h = 1,0 mm a vzdialenosťou vnútorných povrchov a = 2,0 mm. Medzi platňami je vzduch s permitivitou ε_0 = 8,9·10^{-12} F.m^{-1}.

a) Určte kapacitu C kondenzátora.

b) Určte počet N_0 voľných elektrónov v platniach, ak predpokladáme, že na jeden atóm medi pripadá jeden voľný elektrón.

Kondenzátor pripojíme pomocou medených vodičov s priemerom d = 0,50 mm na zdroj konštantného napätia U = 12 V s vnútorným odporom R = 1,0 Ω.

c) Určte začiatočnú hodnotu I_0 prúdu vo vodičoch v okamihu pripojenia zdroja na vybitý kondenzátor.

d) Určte počet N_1 elektrónov, ktoré prejdú prierezom vodiča za čas t_1 = 1,0 s a strednú rýchlosť v_1 usmerneného (driftového) pohybu elektrónov vo vodiči pri prúde I_0.

e) Určte počet N_2 elektrónov, ktoré prejdú zdrojom od okamihu pripojenia kondenzátora do jeho úplného nabitia na napätie zdroja. Určte pomer $p_1 = N_2/N_0$. Akú prácu W pritom zdroj vykoná? Určte pomer $p_2 = E_C/W$, kde E_C je energia elektrického poľa nabitého kondenzátora. Vysvetlite, prečo je hodnota pomeru $p_2 < 1$.

f) Určte približný čas t_2, za ktorý sa kondenzátor nabije po pripojení na zdroj. (*Pozn.: Presné riešenie vyžaduje riešenie diferenciálnej rovnice pre nabíjanie kondenzátora a za čas nabitia možno považovať čas dosiahnutia 95 % konečného*

náboja. Pre približné určenie času nabitia stačí predpokladať lineárnu časovú závislosť nabíjacieho prúdu a jeho pokles na nulovú hodnotu).

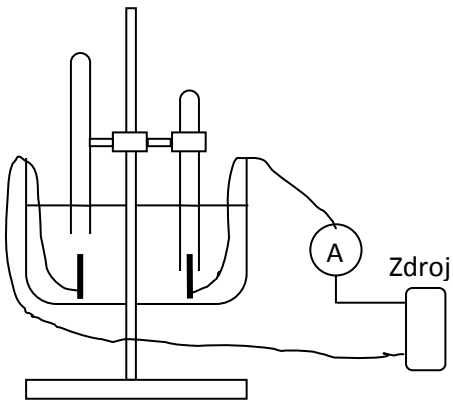
Úlohu riešte všeobecne a potom pre dané hodnoty. Potrebné hodnoty konštánt vyhľadajte v MF tabuľkách.

7. Elektrolýza vody

Experimentálne overte Faradayove zákony pre elektrolýzu.

Postup:

Zostavte aparatúru podľa obr. B–5. Do vaničky nalejte destilovanú vodu a pomocou stojanu vložte do vody dva odmerné valce hore dnom. Na začiatku sú valce plné vody. Pod otvory valcov vložte tenké elektródy a pripojte ich cez ampérmeter k zdroju konštantného napätia (9 V batéria alebo laboratórny zdroj). Na elektródach vznikajú bublinky plynov, ktoré sa zachytávajú vo valcoch. Keď vo valci, v ktorom je objem zachyteného plynu väčší, dosiahne objem plynu približne polovicu objemu valca, udržujte naďalej tlak plynov vo valcoch rovný atmosférickému tlaku (hladiny vody vo valci udržujte na úrovni hladiny vody vo vaničke). Keď sa valec naplní na približne na 90 % svojho objemu, odpojte zdroj a druhý valec posuňte v zvislom smere tak, aby aj v ňom mal plyn atmosférický tlak. Počas elektrolýzy udržiavajte konštantný prúd ampérmetra a merajte čas prechodu prúdu.



Obr. B - 5

Úlohy:

1. Určte, v ktorom valci a zachytáva kyslík a v ktorom vodík. Odpoveď vysvetlite.
2. Do tabuľky zapisujte časy τ merania a zodpovedajúce objemy V_1 a V_2 plynov v odmerných valcoch (pri atmosférickom tlaku p_a plynov). Zapíšte aj teplotu t miestnosti a prúd I prechádzajúci obvodom.
3. Odvoďte vzťah, podľa ktorého možno určiť látkové množstvo n_1, n_2 jednotlivých plynov pomocou prúdu I a času τ elektrolýzy. Pomocou tohto vzťahu vypočítajte látkové množstvá n_1, n_2 vylúčených plynov zodpovedajúce jednotlivým časom τ merania a výsledky zapíšte do tabuľky.
4. Odvoďte vzťah, podľa ktorého možno určiť látkové množstvo jednotlivých plynov pomocou objemu vylúčených plynov. Pomocou tohto vzťahu vypočítajte látkové množstvá n_1, n_2 vylúčených plynov zodpovedajúce jednotlivým časom τ merania a výsledky zapíšte do tabuľky.

5. Výsledky získané v častiach 3. a 4. Úlohy znázornite do grafu v závislosti od času τ elektrolýzy. Ukážte, že tieto funkcie sú lineárne. V grafoch každú sériu meraní (bodov) preložte priamku. Porovnajte výsledky získané v bodoch 3. a 4.
6. Na základe výsledkov merania určte náboj Q, ktorý zodpovedá vylúčeniu jedného mólu vodíka a jedného mólu kyslíka a výsledok porovnajte s hodnotou Faradayovho náboja.

Pozn.: V prípade malého prúdu (pomalej elektrolýzy destilovanej vody) možno elektrolýzu urýchliť pridaním malého množstva zriedenej kyseliny sírovej.

***Upozornenie**: V prípade manipulácie s kyselinou sírovou dbajte na bezpečnosť práce s žieravinami - použite laboratórne rukavice a okuliare.*

Ďalšie informácie nájdete na stránke Fyzikálnej olympiády: http://fo.uniza.sk

---

Fyzikálna olympiáda, 53. ročník – Úlohy školského kola kategórie B

Autori: Dušan Nemec (1 až 3), Ivo Čáp (4, 6, 7), Ľubomír Konrád (5)

Recenzenti: Daniel Kluvanec, Mária Kladivová, Ľubomír Mucha
Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011