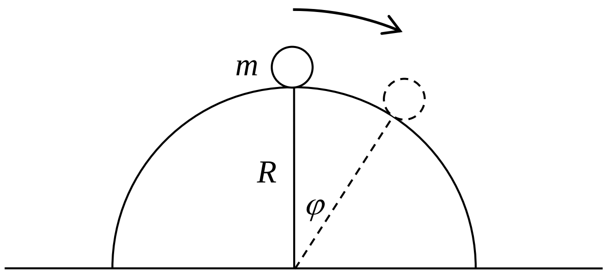
56. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2014/2015
Kategória A – domáce kolo
texty úloh

1. *Valenie gule*

Na vodorovnej podložke sa nachádza ťažká nehybná polguľa s polomerom R = 20 cm. Na vrchole polgule je zachytená malá homogénna guľôčka s hmotnosťou m = 32 g a polomerom r = 10 mm. Po uvoľnení sa začne guľôčka pohybovať valivým pohybom smerom nadol po povrchu polgule, obr. A–1.



Obr. A–1

a) Odvoďte vzťah pre rýchlosť v pohybu ťažiska guľôčky ako funkciu uhla φ za predpokladu, že sa guľôčka na povrchu polgule neprešmykuje. Valivý odpor v tomto prípade zanedbajte.

b) Určte hodnotu φ_1 stredového uhlu φ, pri ktorom sa začne guľôčka na povrchu polgule prešmykovať a rýchlosť v_1 pohybu ťažiska guľôčky pri tomto uhle, ak je faktor statického trenia medzi povrchmi telies f = 0,15.

c) Určte medznú hodnotu φ_{1m}, ktorú nemôže prekročiť uhol φ_1 aj keby bol faktor trenia extrémne veľký.

Moment zotrvačnosti guľôčky vzhľadom na os prechádzajúcu jej stredom $I = (2/5)\, m\, r^2$, g = 9,8 m/s^2.

2. *Vodič v magnetickom poli*

V homogénnom magnetickom poli s veľkosťou magnetickej indukciou B = 1,5 T sa nachádzajú dve dlhé rovnobežné elektricky vodivé koľajničky, ktoré zvierajú s vodorovnou rovinou uhol α. Ich kolmá spojnica je vodorovná a vzájomná vzdialenosť koľajničiek l = 20 cm. Vektor magnetickej indukcie je kolmý na rovinu koľajničiek. Na koľajničkách sa nachádza elektricky vodivý skratovací bežec s hmotnosťou m = 30 g, ktorý sa môže po koľajničkách šmýkať, pričom jeho smer zostáva počas pohybu vodorovný. Faktor trenia medzi bežcom a koľajničkami f = 0,15. Horné konce koľajničiek sú pripojené k induktoru s indukčnosťou L = 2,0 H. Elektrický odpor slučky tvorenej induktorom, koľajničkami a bežcom je veľmi malý. Tiažové zrýchlenie g = 9,8 m·s^{-2}.

Bežec položíme na koľajničky a uvoľníme ho.

a) Určte podmienku pre uhol α, ktorá musí byť splnená, aby sa bežec začal pohybovať pozdĺž koľajničiek.

V ďalšom uvažujte uhol sklonu $\alpha = 10°$.

b) Dokážte, že ak sa bežec začne pohybovať zo začiatočného stavu pokoja, po určitom čase opäť zastane. Určte čas T, za ktorý bežec zastane od začiatku pohybu a dráhu X, ktorú pritom prejde.

c) Určte maximálnu hodnotu v_m rýchlosti, ktorú bežec dosiahne od začiatku pohybu do zastavenia, a čas t_1 od začiatku pohybu, v ktorom túto rýchlosť nadobudne.

d) Určte maximálnu hodnotu I_m, ktorú dosiahne prúd prechádzajúci induktorom od začiatku pohybu bežca až do jeho zastavenia, a čas t_m od začiatku pohybu, v ktorom túto hodnotu dosiahne.

e) Určte teplo Q, ktoré vznikne v obvode za čas T.

Po zastavení pokračuje bežec v pohybe po koľajničkách.

f) Napíšte podmienku pre uhol α, aby sa po zastavení začal bežec pohybovať po koľajničkách smerom nahor. Vysvetlite, ako je možné, že sa začne bežec pohybovať proti smeru pôsobenia tiažovej sily.

Pomôcka 1: Napätie u na induktore s indukčnosťou L závisí od prechádzajúceho prúdu i vzťahom $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Pomôcka 2: Priamym dosadením ukážte, že riešením diferenciálnej rovnice $\ddot{x} + c^2 x = b$ *je funkcia* $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha) + C$. *Vyjadrite veličiny ω a C pomocou veličín c a b. Hodnoty A a α sa určia z hodnôt súradnice x a rýchlosti $v = \dot{x}$ v čase $t = 0$ (počiatočné podmienky). Veličiny $\dot{x}$ a $\ddot{x}$ sú prvá a druhá časová derivácia súradnice, c, b, A a C sú konštanty.*

3. Fotón v gravitačnom poli

Teória relativity ukazuje, že fotóny ako kvantá elektromagnetického žiarenia sa správajú v gravitačnom poli podobne ako ostatné častice. To potvrdzujú viaceré experimenty , napr. vychýlenie svetelného lúča v gravitačnom poli hviezdy alebo gravitačný červený posun v spektre hviezd.

Za účelom overenia vplyvu gravitačného poľa na elektromagnetické žiarenie fyzici realizovali experiment, pri ktorom γ–žiarenie emitované excitovanými jadrami atómu železa $_{26}\mathrm{Fe}^{57}$ prekonalo výškový rozdiel $H = 20$ m pri povrchu Zeme.

a) Pomocou predstavy o zmene potenciálnej energie fotónu určte relatívnu zmenu δ_g frekvencie žiarenia pri prekonaní uvedeného výškového rozdielu. Posúďte, či je možné túto zmenu merať, ak súčasné metódy umožňujú merať frekvenciu až s relatívnou presnosťou 10^{-17}.

b) Určte relatívnu šírku δ_T spektrálnej čiary spôsobenú tepelným pohybom atómov železa, ak atómy v kryštalickej mriežke vzorky kmitajú nezávisle pri teplote $T_0 = 300$ K.

c) Určte relatívnu zmenu δ_m frekvencie žiarenia, ktorú spôsobí spätný pohyb jadra atómu pri emisii fotónu, ak zodpovedajúci rozdiel energetických hladín jadra atómu $E_0 = 14{,}4$ keV.

Z výsledkov predchádzajúcich častí je zrejmé, $\delta_g << \delta_T$ a $\delta_g << \delta_m$, a teda nepatrnú relatívnu zmenu δ_g nemožno pozorovať. Tento problém sa podarilo vyriešiť s využitím Mössbauerovho javu (*Rudolf L. Mössbauer – objav 1958, Nobelova cena 1961*) . Jeho podstata spočíva veľmi zjednodušene v tom, že atóm je pevne zakomponovaný do kryštálickej mriežky pevnej vzorky, ktorá predstavuje jeden kvantový systém. Pri vhodných podmienkach sa zdrojom fotónu stáva nie jednotlivý atóm, ale vzorka ako celok. Súčasne sa eliminuje tepelné rozšírenie spektrálnej čiary.

d) Určte výsledky častí b) a c) za predpokladu, že fotón vyžiari kryštálická vzorka s hmotnosťou m = 1,0 g. Posúďte, či je v tomto prípade rozšírenie spektrálnej čiary vplyvom tepelného pohybu a spätného rázu dostatočne malé na pozorovanie gravitačného posunu frekvencie uvedeného γ–žiarenia.

Pozn.: Pri riešení časti b) využite Dopplerov jav a za rýchlosť tepelného pohybu atómov považujte strednú kvadratickú rýchlosť atómov mriežky.

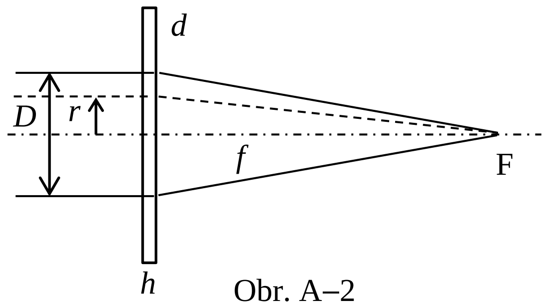
Hodnoty potrebných konštánt vyhľadajte vo fyzikálnych tabuľkách.

Pomôcka 1: Pre x<<1 platí približný vzťah $\sqrt{1+x} \approx 1+(1/2)x-(1/8)x^2$.

Pomôcka 2: V časti b) uvažujte strednú energiu kmitov atómu v kryštálovej mriežke $3k_BT$, kde k_B je Boltzmannova konštanta.

4. *Zaostrenie lúča*

V optických sústavách sa využívajú okrem bežných prvkov, ako sú zrkadlá a šošovky, aj netradičné optické prvky, ako sú planárne šošovky, gradientové optické vlákna a pod.



Obr. A–2

Na vytvorenie zaostreného laserového zväzku možno použiť ako výstupné okienko lasera tenkú kruhovú sklenenú platničku vyrobenú špeciálnou technológiou, ktorej index lomu n sa mení v závislosti od vzdialenosti r od jej stredu. Primárny kolineárny laserový zväzok s priemerom D dopadá kolmo na platničku okienka s priemerom $d > D$ a hrúbkou $h << D$ a jeho os prechádza stredom platničky, obrázok A–2.

a) Dokážte, že platnička predstavuje optickú spojku s ohniskovou vzdialenosťou $f >> D$, ak je závislosť indexu lomu $n(r)$ daná kvadratickou funkciou $n_1(1 + \alpha r^2)$, kde α je konštantný koeficient.

b) Určte hodnotu koeficientu α, aby pri hrúbke platničky h = 1,0 mm a hodnote indexu lomu v strede platničky n_1 = 1,5 bola ohnisková vzdialenosť f = 20 cm. Určte hodnotu δ relatívnej zmeny indexu lomu medzi stredom a okrajom platničky, ak je priemer platničky d = 1,0 cm.

Pozn.: Lúče sa sústredia do ohniska F, v ktorom majú rovnakú fázu, resp. do tohto bodu absolvujú rovnakú optickú dráhu.

5. *Atóm hélia*

Atóm hélia je najjednoduchší atóm s viacerými elektrónmi. Pozostáva z jadra s nábojom $2e$ a dvoch elektrónov s nábojmi $-e$. Hmotnosť jadra je mnohonásobne väčšia ako hmotnosť elektrónu. Kvantovo mechanické riešenie stacionárnych stavov tejto sústavy troch častíc je pomerne náročné. Určité približné predstavy však možno získať pomocou modelu analogického Bohrovmu modelu atómu vodíka. V prípade iónu He^+ s jediným elektrónom sa predpokladá pohyb elektrónu po kružnicovej trajektórii s jadrom v jej strede. Ak ide o neutrálny atóm, pohybujú sa obidva elektróny po rovnakej kružnici, pričom vzájomná vzdialenosť elektrónov je rovná dvojnásobku jej polomeru. Základný stacionárny stav je daný kvantovou podmienkou, podľa ktorej je moment hybnosti každého elektrónu vzhľadom na stred trajektórie rovný $L_e = \hbar \approx 1{,}05 \times 10^{-34}$ J·s (Planckova konštanta).

a) Určte polomer r_1 atómu hélia v základnom stacionárnom stave, ak predpokladáte, že tento polomer je rovný polomeru trajektórie elektrónov.

b) Určte energiu E_1 základného stacionárneho stavu atómu hélia (dvojice elektrónov).

Pôsobením elektromagnetického žiarenia možno atóm ionizovať premenou na ión He^+ alebo He^{++} uvoľnením jedného alebo obidvoch elektrónov.

c) Určte polomer r_1^+ a energiu E_1^+ základného stavu iónu He^+.

d) Určte ionizačnú energiu ΔE_1 potrebnú na uvoľnenie jedného elektrónu z atómu He a porovnajte ju s tabuľkovou molárnou hodnotou $E_1^* = 2\,372{,}3$ kJ·mol^{-1}.

e) Určte ionizačnú energiu ΔE_2 potrebnú na uvoľnenie elektrónu z iónu He^+ a porovnajte ju s tabuľkovou molárnou hodnotou $E_2^* = 5\,250{,}5$ kJ·mol^{-1}.

f) Na základe porovnania podľa d) a e) posúďte, pre ktorú zo sústav He alebo He^+ poskytuje použitý model lepší výsledok.

Potrebné hodnoty konštánt vyhľadajte vo fyzikálnych tabuľkách.

6. *Tepelné vyžarovanie telesa*

Jednou z úloh experimentálnej fyziky je správne vyhodnocovanie výsledkov merania. Pri analýze sa často využívajú grafické znázornenia výsledkov, rôzne transformácie veličín, numerické metódy s využitím výpočtovej techniky a pod.

Táto úloha sa zameriava na analýzu výsledkov merania spektrálnej hustoty vyžarovania rozžeraveného telesa, ktoré sú usporiadané v nasledujúcej tabuľke.

λ/μm	T/K				
	1300	1200	1100	1000	900
1,0	0,60	0,24	0,08	0,02	0,00
1,5	3,14	1,70	0,82	0,35	0,12
2,0	4,70	2,96	1,72	0,89	0,40
2,2	4,83	3,17	1,93	1,07	0,52
2,4	4,77	3,24	2,05	1,19	0,61
2,6	4,57	3,19	2,10	1,27	0,68
2,8	4,29	3,07	2,08	1,30	0,73
3,2	3,65	2,72	1,92	1,27	0,76
3,5	3,17	2,41	1,75	1,20	0,74
4,0	2,46	1,93	1,45	1,04	0,70
5,0	1,48	1,20	0,95	0,72	0,55
7,0	0,58	0,49	0,41	0,33	0,26
10,0	0,19	0,16	0,14	0,12	0,10
12,0	0,10	0,09	0,08	0,07	0,05
	$I(\lambda,T)/10^{10}$ W·m^{-3}				

V hrubo orámovanej časti tabuľky sú namerané hodnoty spektrálnej hustoty intenzity žiarenia $I(\lambda,T)$ v jednotkách 10^{10} W·m^{-3} pre rôzne vlnové dĺžky λ žiarenia a rôzne teploty T povrchu telesa.

a) Z nameraných výsledkov zostrojte graf závislosti I od λ pre jednotlivé hodnoty teploty T.

b) Z grafu určte čo najpresnejšie hodnoty vlnovej dĺžky λ_m pre jednotlivé hodnoty teploty T, pri ktorých dosahuje spektrálna hustota intenzity žiarenia maxcimálnu hodnotu. Predpokladajte, že závislosť λ_m od teploty T možno opísať mocninovou funkciou $\lambda_m = a\,T^b$. Pre veličiny λ_m a T zostrojte vhodný graf, ktorý umožní overenie uvedenej mocninovej závislosti. Pomocou tohto grafu určte hodnoty koeficientov a a b.

c) Predpokladajte, že závislosť spektrálnej hustoty intenzity žiarenia I od vlnovej dĺžky λ možno vyjadriť mocninovým vzťahom $I = A\,T^m\,\lambda^n$. Zostrojte vhodné grafy pre premenné I a λ pre jednotlivé teploty a zistite, v akom intervale Δ hodnôt vlnovej dĺžky možno považovať závislosť I od λ pre danú teplotu T za mocninovú. Pre tento interval Δ určte z grafu hodnotu exponentu n. Potom zostrojte vhodný graf pre premenné I a T pre niekoľko hodnôt vlnovej dĺžky z intervalu Δ, pomocou ktorého overíte mocninovú závislosť I od T. Určte hodnoty exponentu m a koeficientu A.

Spektrálna hustota intenzity žiarenia je diferenciálna veličina, ktorá poskytuje informáciu o rozložení výkonu žiarenia pozdĺž spektra vlnových dĺžok. Je definovaná vzťahom $I(\lambda,T)=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\lambda}$, kde d$P$ je výkon vyžarovaný z plochy dS povrchu telesa v intervale vlnových dĺžok (λ, λ + dλ). Celovú intenzitu žiarenia I_0 = dP/dS možno získať integráciou spektrálnej hustoty $I_0=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}=\int_0^\infty I(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda$ v celom intervale vlnových dĺžok žiarenia.

d) Pomocou numerickej integrácie funkcie $I(\lambda,T)$ podľa premennej λ v intervale vlnových dĺžok z tabuľky určte pre jednotlivé teploty T hodnoty integrálu S_T. *Pozn.: Na numerickú integráciu je vhodné použiť počítač, napr. MS EXCEL.* Prečo je vzťah $S_T \approx I_0$ iba približný? Predpokladajte, že závislosť I_0 od teploty T je mocninová $S_T \approx I_0 = s\,T^r$. Zostrojte vhodný graf pre premenné I_0 (resp. S_T) a T tak, aby ste overili mocninovú závislosť. Pomocou tohto grafu určte hodnoty exponentu r a koeficientu s.

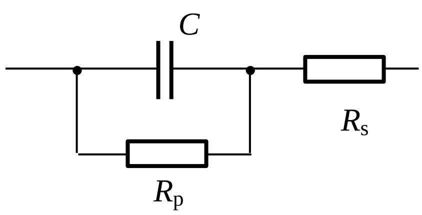
e) Porovnajte hodnoty získané analýzou tabuľky nameraných hodnôt so hodnotami z Wiennovho posuvného zákona, Stefan–Boltzmannovho zákona a Rayleigh–Jeansovho zákona.

Pozn.: Pre grafické hodnotenie rôznych závislostí je vhodné voliť premenné na osiach tak, aby bola grafom funkcie priamka. Jednoducho sa určujú parametre priamky a výrazne sa prejavuje odchýlka od predpokladanej lineárnej závislosti.

Pozn.: Pre numerickú integráciu stačí použiť jednoduchú lichobežníkovú metódu.

7. ***Štúdium elektrických vlastností superkondenzátora*** *– experimentálna úloha*

V elektronických zariadeniach sú potrebné kondenzátory s vysokými kapacitami na dlhodobé udržanie napätia napr. pri napájaní CMOS pamätí v počítačoch, audio a video zariadeniach. V nedávnej minulosti sa podarilo vyvinúť *superkondenzátory* s mimoriadne vysokými kapacitami až niekoľko tisíc faradov. Superkondenzátory sú určené pre nízke jednosmerné napätie niekoľkých voltov. Zjednodušená náhradná schéma superkondenzátora je na obrázku A–3. Hlavným parametrom je kapacita C. Sériový odpor R_s má funkciu obmedzovania nabíjacieho a vybíjacieho prúdu, paralelný odpor modeluje samovybíjania kondenzátora.



Obr. A–3

Cieľom experimentálnej úlohy je určenie vnútorných parametrov C, R_s a R_p superkondenzátora. Odporúča sa použiť superkondenzátor 0,47 F/5,5 V, ktorý možno kúpiť v obchode s elektronickými súčiastkami za cenu približne 2 €. Napätie na kondenzátore nesmie prekročiť uvedenú medznú hodnotu U_{max} = 5,5 V danú výrobcom. Na experimentovanie sa odporúča použiť ako zdroj štvorcovú batériu s napätím 4,5 V.

Odpor R_s je rádove desiatky ohmov, R_p rádove desiatky kΩ.

a) Odvoďte vzťah pre časovú závislosť napätia $u(t)$ na kapacitore s kapacitou C pri jeho vybíjaní cez rezistor s odporom R

$$u(t) = U_0\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (1)$$

kde $\tau = R\,C$ je časová konštanta obvodu.

b) Pripojte kondenzátor k zdroju konštantného napätia $U < U_{max}$ a nabite kondenzátor. Z menovitej hodnoty kapacity, napätia zdroja a odhadu sériového odporu R_s odhadnite čas potrebný na nabitie. Po uplynutí tohto času zapojte do obvodu digitálny ampérmeter (multimeter) a sledujte prúd v obvode až kým sa neustáli na minimálnej hodnote I_{min}. Pomocou tohto prúdu určte odpor R_p (predpokladajte $R_s << R_p$).

c) Nakreslite schému elektrického obvodu s pripojeným zdrojom a ampérmetrom (podľa úlohy b) a vyznačte v nej jednotlivé veličiny.

d) Od nabitého kondenzátora odpojte zdroj a pripojte k nemu digitálny voltmeter s vysokým vnútorným odporom (> 10 MΩ). V dôsledku samovybíjania cez odpor R_p klesá napätie na kondenzátore. Pomocou daných hodnôt veličín v obvode odhadnite čas potrebný na vybitie kondenzátora na polovičné napätie. Na základe toho určte čas merania napätia pre určenie časovej závislosti $u = u(t)$ napätia. Namerané hodnoty zapíšte do tabuľky a zostrojte vhodný graf, ktorý umožňuje overiť exponenciálnu závislosť (A) a určenie časovej konštanty τ_1. Určte kapacitu C kondenzátora.

e) Nakreslite schému elektrického obvodu s pripojeným zdrojom a voltmetrom (podľa úlohy e) a vyznačte v nej jednotlivé veličiny.

f) K nabitému kondenzátoru pripojte voltmeter. K svorkám kondenzátora pripojte vybíjací rezistor s odporom okolo 100 Ω. Hodnotu vybíjacieho odporu zmerajte Ω–metrom (multimetrom prepnutým na meranie odporu). Po pripojení vybíjacieho rezistora merajte časovú závislosť napätia na kondenzátore, hodnoty času a napätia zapíšte do tabuľky a zostrojte graf, umožňujúci určiť časovú konštantu τ_2 obvodu. Určte hodnotu sériového odporu R_s.

g) Nakreslite schému elektrického obvodu podľa úlohy f) a vyznačte v nej jednotlivé veličiny.

(ďalšie informácie na http://fo.uniza.sk a www.olympiady.sk)

---

56. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie A*

Autori úloh: Ľubomír Konrád (1, 4), Ľubomír Mucha (5), Ivo Čáp (2, 3, 6, 7)
Recenzia a úprava: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakcia: Ivo Čáp
Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014