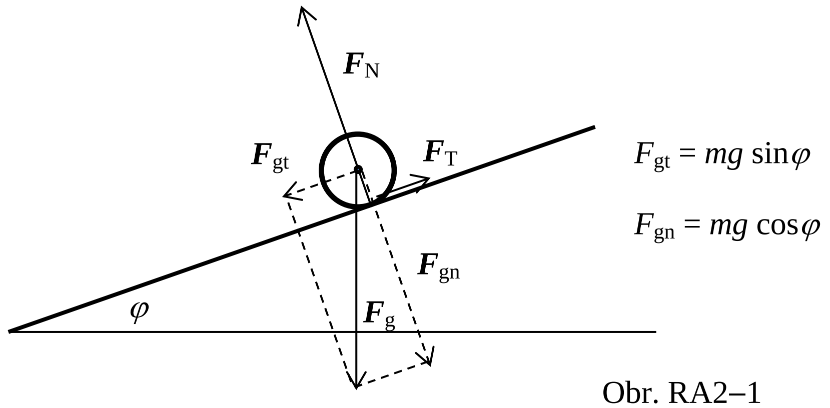
56. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2014/2015
Kategória A – krajské kolo
riešenie úloh

1. Guľôčky na šikmej doske

Riešenie:

a)



Obr. RA2–1

1 bod

b) *Postupným pohybom telesa rozumieme pohyb jeho hmotného stredu.*
V bode dotyku guľôčky s naklonenou rovinou pôsobí trenie. Sila trenia F_T pôsobí na guľôčku proti smeru jej pohybu, tzn. v smere naklonenej roviny nahor. Pohybová rovnica postupného pohybu guľôčky je

$$m a = m g \sin\varphi - F_\mathrm{T}, \qquad (1)$$

kde a je zrýchlenie postupného pohybu.

Moment sily $M = F_\mathrm{T} R$ vzhľadom os prechádzajúcu stredom guľôčky spôsobí jej rotáciu s uhlovým zrýchlením α, ktorú opisuje rovnica

$$I\alpha = F_\mathrm{T} R, \qquad (2)$$

kde I je moment zotrvačnosti guľôčky vzhľadom na os prechádzajúcu jej stredom. Podľa veľkosti uhla sklonu môže byť trenie statické alebo šmykové. Sila statického trenia musí spĺňať podmienku

$$F_\mathrm{T} \le f_\mathrm{s} F_\mathrm{N}, \qquad (3)$$

kde F_N je prítlačná sila (normálová sila v bode dotyku rovná normálovej zložke tiažovej sily F_g), v našom prípade $F_\mathrm{N} = mg\cos\varphi$. Ak sila trenia (dotyčnicová sila v bode dotyku) prekročí medznú hodnotu, dôjde k vzájomnému prešmyknutiu povrchov a trenie sa stáva šmykové (dynamické, kĺzavé), ktoré má veľkosť

$$F_\mathrm{T} = f_\mathrm{d}\, F_\mathrm{N}\,. \qquad (4)$$

Pre hodnoty faktora trenia bežne platí $f_\mathrm{d} \le f_\mathrm{s}$.

Pri malých uhloch sklonu $\varphi < \varphi_\mathrm{m}$ je trenie statické a pohyb guľôčky je valivý. V takom prípade platí

$$a = R\,\alpha\,. \qquad (5)$$

Dosadíme (5) do (1) a (2) a vyjadríme silu statického trenia

$$F_\mathrm{T} = \frac{m\,g \sin\varphi}{\dfrac{mR^2}{I} + 1}\,. \qquad (6)$$

Použitím hodnoty sily trenia F_T (6) v podmienke (3) dostaneme kritérium pre medzný uhol

$$\mathrm{tg}\varphi \le f_\mathrm{s}\left(\frac{mR^2}{I} + 1\right) = \mathrm{tg}\varphi_\mathrm{m}\,.$$

Pre guľu $I = \dfrac{2}{5}\, m R^2$ a teda

$\mathrm{tg}\varphi_\mathrm{m} \le \dfrac{7}{2}\, f_\mathrm{s}$. Pre dané hodnoty $\varphi_\mathrm{m} \approx 24°$. 3 body

c) Ak je uhol sklonu $\varphi < \varphi_\mathrm{m}$, pohybuje sa guľôčka valivým pohybom. Z rovníc (1) a (2) a podmienky (5) určíme zrýchlenie guľôčky

$$a_1 = \frac{g \sin\varphi}{1 + \dfrac{I}{m R^2}} = \frac{5}{7}\, g \sin\varphi\,.$$

Zrýchlenie je konštantné a ide o rovnomerne zrýchlený pohyb. Čas na prekonanie dráhy s

$$t_\mathrm{s1} = \sqrt{\frac{2s}{a_1}} = \sqrt{\frac{14 s}{5 g \sin\varphi}}\,.$$

Pre dané hodnoty a uhol sklonu $\varphi_1 < \varphi_\mathrm{m}$ $t_\mathrm{s1} \approx 1{,}2$ s. 1 bod

Ak je uhol sklonu $\varphi > \varphi_\mathrm{m}$, je trenie šmykové. Zrýchlenie pohybu dostaneme z rovníc (1) a (4)

$$a_2 = g\,(\sin\varphi - f_\mathrm{d}\,\cos\varphi).$$

Čas pohybu na dráhe s je v tomto prípade

$$t_\mathrm{s2} = \sqrt{\frac{2s}{a_2}} = \sqrt{\frac{2s}{g\,(\sin\varphi - f_\mathrm{d}\,\cos\varphi)}}\,.$$

Pre dané hodnoty a uhol sklonu $\varphi_2 > \varphi_\mathrm{m}$ $t_\mathrm{s2} \approx 0{,}77$ s. 1 bod

d) V prípade valivého pohybu, tzn. pri $\varphi < \varphi_\mathrm{m}$,

$$v_\mathrm{s1} = a_1\, t_\mathrm{s1} = \sqrt{\frac{10\, g\, s}{7} \sin\varphi}$$

a uhlová rýchlosť

$$\omega_\mathrm{s1} = \frac{v_\mathrm{s1}}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{10\, g\, s}{7} \sin\varphi}\,.$$

Pre dané hodnoty a uhol sklonu $\varphi_1 < \varphi_m$ $v_{s1} \approx 2{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\omega_{s1} \approx 2{,}1 \cdot 10^2\ \mathrm{s^{-1}}$. 2 body

V prípade pohybu s prešmykovaním, tzn. pri $\varphi > \varphi_m$

$$v_{s2} = a_2\, t_{s2} = \sqrt{2 s g \left(\sin\varphi - f_d \cos\varphi\right)}\,.$$

Z rovníc (2) a (4) určíme uhlové zrýchlenie

$$\alpha_2 = \frac{R}{I} f_d\, m g \cos\varphi = \frac{1}{R}\frac{5}{2} f_d\ g \cos\varphi\,.$$

Výsledná uhlová rýchlosť

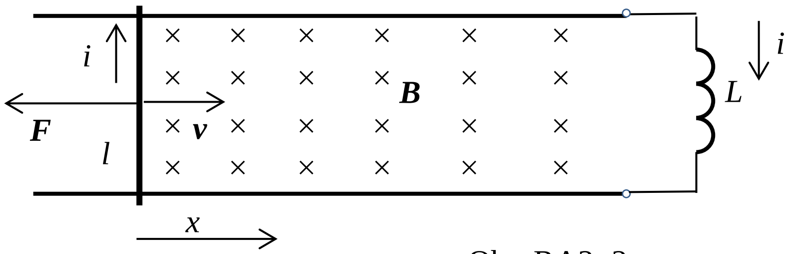
$$\omega_{s2} = \alpha_2\, t_{s2} = \frac{5}{2R} f_d \cos\varphi \sqrt{\frac{2 s g}{\left(\sin\varphi - f_d \cos\varphi\right)}}\,.$$

Pre dané hodnoty a uhol sklonu $\varphi_2 > \varphi_m$ $v_{s2} \approx 3{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\omega_{s2} \approx 1{,}6 \cdot 10^2\ \mathrm{s^{-1}}$. 2 body

2. *Pružný magnetický nárazník*

Riešenie:

a)



Obr. RA2–2

1 bod

Keď sa vozík pohybuje v magnetickom poli, indukuje sa medzi jeho kolesami (a tým medzi koľajnicami) napätie $u = B\,l\,v$. V obvode vozíka a induktora prechádza prúd i, ktorý súvisí s napätím vzťahom $u = L\,\mathrm{d}i / \mathrm{d}t$. Na vozík v magnetickom poli pôsobí brzdiaca sila $F = B\,i\,l$. Z hľadiska energie v uzavretej sústave platí $\Delta(E_L + E_k) = 0$, kde $E_L = (1/2)\,L\,i^2$ je energia magnetického poľa induktora a $E_k = (1/2)\,m\,v^2$ kinetická energia vozíka. Pri narastaní prúdu vyvolaného pohybom vozíka klesá kinetická energia vozíka a tým aj jeho rýchlosť. Energia E_L a tým aj prúd dosiahnu maximálnu hodnotu pri zastavení vozíka. Prúd i a teda aj spätná sila F dosiahne maximálnu hodnotu v okamihu zastavenia vozíka a vozík sa jej účinkom začne pohybovať smerom nazad. Energia E_L induktora sa mení na kinetickú energiu E_k vozíka. Napokon prúd klesne na nulu a vozík vyjde z magnetického poľa s pôvodnou rýchlosťou v_0 (v opačnom smere). Tento jav možno nazvať dokonale pružným odrazom vozíka. 1 bod

b) Pohybová rovnica vozíka má tvar

$$m a = -B i l\,. \qquad (1)$$

Medzi koľajnicami v pohybujúcom vozíku sa indukuje v magnetickom poli napätie $u = Blv$. To súvisí s prúdom induktora vzťahom $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ a teda platí

$$Blv = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \qquad (2)$$

Derivovaním rovnice (2) máme

$$Bl\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}, \text{ kde } \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$$

Z výrazov (1) a (2) dostávame rovnicu pre prúd v obvode

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{B^2 l^2}{mL} i. \qquad (3)$$

2 body

Riešenie tejto rovnice predpokladáme všeobecne v tvare

$$i(t) = I_0 + I_\mathrm{m}\sin(\omega t + \alpha). \qquad (4)$$

Prvá a druhá derivácia tejto funkcie majú tvar

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \omega I_\mathrm{m}\cos(\omega t + \alpha) \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 I_\mathrm{m}\sin(\omega t + \alpha).$$

Po dosadení do rovnice (3) máme

$$-\omega^2 I_\mathrm{m}\sin(\omega t + \alpha) = -\frac{B^2 l^2}{mL}\left(I_0 + I_\mathrm{m}\sin(\omega t + \alpha)\right), \qquad (5)$$

odkiaľ vidno, že funkcia (4) vyhovuje rovnici (3) a preto je jej riešením. 0,5 bodu

Z porovnania ľavej a pravej strany zároveň máme

$I_0 = 0$ 0,5 bodu

a $\omega = \dfrac{Bl}{\sqrt{mL}}$. Pre dané hodnoty $\omega \approx 0{,}73\ \mathrm{s}^{-1}$. 0,5 bodu

Prúd v obvode je harmonický $i(t) = I_\mathrm{m}\sin(\omega t + \alpha)$. Na začiatku (v okamihu vniknutia vozíka do magnetického poľa) prúd $i(0) = 0$ aj energia induktora $E_\mathrm{L} = ½\, L\, i^2$ nulová, čo však znamená, že vo funkcii (5)

$\sin\alpha = 0$ a teda $\alpha = 0$ 0,5 bodu

(sú to začiatočné podmienky deja, ktoré musí splňovať aj funkcia (5)).

Pre prúd platí $i(t) = I_\mathrm{m}\sin\omega t$.

Podľa (2)

$$v = \frac{L}{Bl}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{Bl}\omega I_\mathrm{m}\cos\omega t.$$

Na začiatku (v čase $t = 0$) rýchlosť pohybu

$$v_0 = \frac{L}{Bl}\omega I_\mathrm{m}.$$

Maximálna hodnota prúdu

$$I_\mathrm{m} = \frac{Blv_0}{\omega L} = \sqrt{\frac{m}{L}}\, v_0.$$ Pre dané hodnoty $I_\mathrm{m} \approx 0{,}11$ A. 1 bod

c) Funkcia $\sin\omega t$ je periodická s periódou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{Bl}\sqrt{mL} \ .$$

Vozík sa zastaví (rýchlosť nadobudne nulovú hodnotu) za čas

$\tau = \dfrac{T}{4} = \dfrac{\pi}{2Bl}\sqrt{mL}$. Pre dané hodnoty $\tau \approx 2{,}2$ s. 1 bod

d) Sila pôsobiaca na vozík

$$F = -Bli \qquad (6)$$

Pre výpočet tuhosti „magnetickej pružiny“ potrebujeme vyjadriť vzťah medzi prúdom i a výchylkou x.

Jedna z možností určenia tohto vzťahu spočíva vo vyjadrení závislosti výchylky x integráciou rýchlosti

$$x = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{L}{Bl}\,\omega\, I_\mathrm{m} \int_0^t \cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{L}{Bl}\, I_\mathrm{m} \sin\omega t = \frac{L}{Bl}\, i \ .$$

Druhú možnosť poskytuje funkcia (2)

$$Bl\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \ .$$

Keďže na začiatku (v čase $t = 0$) $x = 0$ a $i = 0$, pre $t > 0$

$$Blx = Li \ .$$

Z oboch výsledkov pre prúd i platí $i = (B\,l\,/\,L)\,x$.

Silu, ktorá pôsobí na vozík, vyjadríme dosadením prúdu i do vzťahu (6)

$$F = -\frac{B^2 l^2}{L}\,x = -k\,x \ .$$

Sila je priamo úmerná výchylke a pôsobí proti smeru výchylky, čo je typické aj pre mechanickú pružinu. Tuhosť „magnetickej pružiny“

$k = \dfrac{(Bl)^2}{L}$. Pre dané hodnoty $k \approx 2{,}7\cdot10^{-2}$ N·m^{-1}. 2 body

3. *Hrubá šošovka*

Riešenie:

Z podobnosti trojuholníkov v predmetovom priestore podľa obr. A2–1 máme

$$\frac{1}{z} = \frac{y}{y'} = \frac{a-f}{f}\text{, odkiaľ dostaneme } a = f\,\frac{1+z}{z}.$$ 3 body

V prvej polohe $a_1 = f\,\dfrac{1+z_1}{z_1}$, druhej polohe $a_2 = a_1 - d = f\,\dfrac{1+z_2}{z_2}$.

Z rozdielu rovníc dostávame

$$a_1 - a_2 = d = f\,\frac{1+z_1}{z_1} - f\,\frac{1+z_2}{z_2} = f\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)$$ 3 body

a ďalej

$$f = \frac{d}{\dfrac{1}{z_1} - \dfrac{1}{z_2}}.$$ 4 body

Všetky veličiny sú presne merateľné.

4. *Biely trpaslík*

Riešenie:

a) Stredná hustota hviezdy $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{3m}{4\pi R^3}$. Pre dané hodnoty $\rho \approx 2{,}39\times10^{9}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

1 bod

b) Vlnová dĺžka maxima spektrálnej hustoty vyžarovanie

$\lambda_\mathrm{m} = \dfrac{b}{T}$. Pre dané hodnoty $\lambda_\mathrm{m} \approx 1{,}16\times10^{-7}$ m.

Ide o ultrafialové žiarenie. 2 body

c) Výkon vyžarovaný z povrchu hviezdy určuje Stefan–Boltzmannov zákon

$$P = \sigma T^4\, S = 4\pi R^2\, \sigma T^4.$$

Pre chladnutie použijeme kalorimetrickú rovnicu

$$M\,c\,\Delta T = P\,\tau.$$

Odtiaľ máme

$$c = \frac{P\,\tau}{M\ \Delta T} = \frac{4\pi R^2\ \sigma T^4\ \tau}{M\ \Delta T}.$$ Pre dané hodnoty $c \approx 6{,}05\times10^{8}\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. 3 body

Z výsledku vidno, že okrem obrovskej hustoty má hviezda aj veľmi vysokú hmotnostnú tepelnú kapacitu.

d) Fotón žiarenia s vlnovou dĺžkou λ a energiou $E = h\,c\,/\,\lambda$ má hmotnostný ekvivalent

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h}{c\,\lambda}.$$ 1 bod

Ak m považujeme za gravitačnú hmotnosť fotónu, je potenciálna energia fotónu na povrchu hviezdy

$$E_\mathrm{p} = -G\,\frac{M\,m}{R} = -G\,\frac{M\,h}{R\,c\,\lambda_0}.$$ 1 bod

Využijeme zákon zachovania mechanickej energie v gravitačnom poli

$$\frac{h\,c}{\lambda_0} - G\,\frac{M\,h}{R\,c\,\lambda_0} = \frac{h\,c}{\lambda},$$ 1 bod

kde λ je vlnová dĺžka pozorovaná vo veľkej vzdialenosti od hviezdy ($E_\mathrm{p} \to 0$).

Zmena vlnovej dĺžky

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{G\,M}{R\,c^2}.$$ Pre dané hodnoty $\Delta\lambda/\lambda \approx 2{,}49\times10^{-4}$. 1 body

Táto zmena je merateľná a predstavuje jeden z dôkazov správnosti Einsteinovej všeobecnej teórie relativity.

(ďalšie informácie na http://fo.uniza.sk a www.olympiady.sk)

56. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie A*

Autor úloh: Ivo Čáp
Recenzia a úprava: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakcia: Ivo Čáp
Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015