56. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2014/2015

Úlohy krajského kola kategórie D - riešenie

1. *Hodinové ručičky*

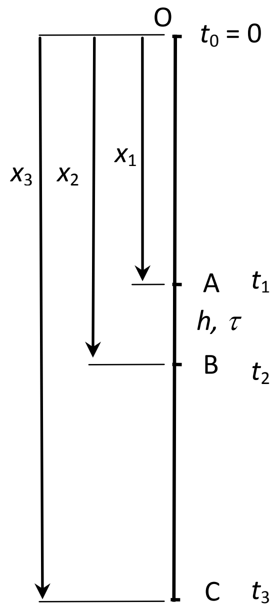
a) Počas každej hodiny dôjde k jednému zákrytu oboch ručičiek hodín. Za 24 hodín počet zákrytov $N = 24$, ak do dňa započítame časy 0:00 i 24:00.
Pozn.: Správna je i odpoveď N = 23, ak do dňa započítame 00:00 ale 24:00 už považujeme za 00:00 ďalšieho dňa. 2b

b) Medzi druhou a treťou hodinou dôjde k zákrytu ručičiek v okamihu, v ktorom uhlová dráha malej ručičky od nultej hodiny je rovná uhlovej dráhe veľkej ručičky za dobu Δt po druhej hodine; pričom $\omega_2 = 2\,\pi/\,T_1$ je uhlová rýchlosť veľkej ručičky a $\omega_1 = \omega_2/12$ uhlová rýchlosť malej ručičky. Z toho
$(2\mathrm{h} + \Delta t)\,\omega_1 = \omega_2\,\Delta t$, po dosadení a úprave máme $\Delta t = 2\text{ h} / 11$.
Hodiny vtedy ukazujú čas $t_{23} = 2\text{ h} \times (1 + 1/11) = 2\text{ h } 10\text{ m } 55\text{ s}$. 4b

c) Vzhľadom na rovnomerný chod hodín sa zákryty opakujú vždy po rovnakom čase
$\tau = 1\text{ h} \times (1 + 1/11) = 12/11\text{ h}$.
Za tento čas sa hodinová ručička natočí o uhlovú dráhu
$\alpha = \omega_2\,\tau = 360°\,\tau\,/\,T_2 \approx 32{,}7°$. 4b

2. *Padajúca loptička*

a) Situačný obrázok (O – začiatok, A – horný okraj okna, B – dolný okraj okna, C – chodník) 2b



b) Voľný pád je rovnomerne zrýchlený pohyb. Keďže rýchlosť $v = g\,t$ rovnomerne rastie s časom, je priemerná rýchlosť pred oknom
$v_\mathrm{p} = (v_1 + v_2)/2 = 0{,}85\,h/\tau = 0{,}425\,h\,N,$
kde $\tau = 2\,/\,N$ je čas medzi prvou a treťou snímkou.
Pre dané hodnoty $v_\mathrm{p} \approx 12{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 4b

c) Priemernú rýchlosť v_p nadobudne kameň na dráhe
$$x_\mathrm{p} = \frac{v_\mathrm{p}^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{0{,}85 \times h\,N}{2}\right)^2.$$
Pre dané hodnoty
$x_\mathrm{p} \approx 8{,}28$ m , t.j. približne 3 H.
Kameň vyhodili o tri poschodia vyššie. 4b

3. *Zrážka*

a) Pri pohybe telieska A po žľabe s nulovým trením zo zákona zachovania mechanickej energie máme

$$m_1\, g\, R \;=\; \frac{1}{2}\, m_1\, v_0^2 \text{, odkiaľ máme}$$

$$v_0 \;=\; \sqrt{2 g R}\;\; . \qquad (1)$$

Pre dané hodnoty veličín $v_0 \approx 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 1,5b

b) Pri zrážke je splnený zákon zachovania hybnosti

$$m_1\, v_0 \;=\; m_1\, v_1 + m_2 v_2 \,. \qquad (2)$$ 1b

Pri dokonale pružnej zrážke sa zachováva mechanická energia, reprezentovaná kinetickou energiou pre stavy tesne pred zrážkou a tesne po nej

$$\frac{1}{2} m_1\, v_0^2 \;=\; \frac{1}{2} m_1\, v_1^2 + \frac{1}{2} m_2\, v_2^2 \,. \qquad (3)$$ 1b

Pre riešenie sústavy rovníc (2) a (3) môžeme rovnice upraviť na tvar

$$m_1 \left(v_0 - v_1\right) \;=\; m_2 v_2 \qquad (4)$$

$$m_1 \left(v_0^2 - v_1^2\right) = \; m_2\, v_2^2 \,. \qquad (5)$$

Ak rovnicu (5) delíme rovnicou (4), máme

$$v_0 + v_1 \;=\; v_2 \;\; . \qquad (6)$$

Dosadením v_2 z rovnice (6) do (4) dostaneme

$$v_1 = v_0\, \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \qquad (7)$$ 1b

a dosadením do (5)

$$v_2 = v_0\, \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \,. \qquad (8)$$ 1b

Pre $m_1 = m_2$: $v_1 = 0$ a $v_2 = v_0$ (teliesko A zastane a B pokračuje rovnakou rýchlosťou ako malo teliesko A pred zrážkou).

Pre $m_1 > m_2$: obidve telieska sa pohybujú v smere nárazu telieska A, pričom $v_1 < v_2$.

Pre $m_1 < m_2$: teliesko B pokračuje v smere nárazu telieska A a teliesko A sa pohybuje opačným smerom ($v_1 < 0$). 3×0,5b

c) Ide o prípad $m_1 > m_2$. Obidve telieska pokračujú v smere nárazu s rovnakým zrýchlením $a = -f g$ (pozn.: $m\, a = -F_t = -f\, m\, g$). Ide o rovnomerne spomalený pohyb, pričom dráha do zastavenia zo začiatočnej rýchlosti v

$$x = \frac{v^2}{2a} \;\; .$$

Vzdialenosť teliesok po ich zastavení

$$d = x_2 - x_1 = \frac{v_2^2}{2\, f\, g} - \frac{v_1^2}{2\, f\, g} = \frac{1}{2\, f\, g} \left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

Po dosadení z (7), (8) a (1) máme

$$d = \frac{v_0^2}{2\,f\,g}\;\frac{4\,m_1^2-(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{R}{f}\;\frac{4\,p_1^2-(p_1-1)^2}{(p_1+1)^2}\,.$$

Pre dané hodnoty $d \approx$ 2,2 m. 2b

d) Takýto prípad môže nastať, iba ak majú obidve telieska rovnakú začiatočnú rýchlosť. To je možné iba vtedy, keď sa prvé teliesko odrazí nazad s rýchlosťou $v_1 = -\,v_2$, vystúpi v žľabe do určitej výšky a vráti sa nazad s rovnako veľkou rýchlosťou (zachovanie mechanickej energie). Podmienka je

$$v_0\,\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} = -\,v_0\,\frac{2\,m_1}{m_1+m_2}\,,$$

odkiaľ máme

$$p_2 = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$ 1b

4. *Kocka vo vode*

a) Na kocku pôsobí gravitačná sila $F_\mathrm{g} = \rho\,V\,g$ a vztlaková sila $F_\mathrm{v} = \rho_0\,V_\mathrm{p}\,g$, kde V je objem kocky a $V_\mathrm{p} = p_1 V$ objem jej ponorenej časti. Podmienka statickej rovnováhy je rovnosť obidvoch síl

$$\rho\,V\,g \;=\; \rho_0\,p_1\,V\,g\,,$$

odkiaľ máme

$\rho = \rho_0\,p_1$, pre dané hodnoty $\rho \approx 750\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. 3b

b) Celková tiaž kocky ponorenej vo vode

$$F_1 = \rho V\,g - \rho_0\,p_2\,V\,g\,.$$ 2b

Na páke v stave rovnováhy platí podmienka

$F_1\,x_1 = m\,g\,x_2$, resp.

$(\rho\,-\rho_0\,p_2)\,V\,p_3 = m$, kde $V = a^3$. 2b

Dĺžka hrany kocky

$$a = \sqrt[3]{\frac{m}{(\rho\,-\rho_0 p_2)\,p_3}} = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho_0\,(p_1-p_2)\,p_3}}\,.$$

Pre dané hodnoty veličín $a \approx$ 6,3 cm. 3b

---

56. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie D*

Autor úloh: Ivo Čáp (1), Ľubomír Konrád (2, 3, 4)
Recenzia a úprava úloh: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakcia: Ivo Čáp
Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015