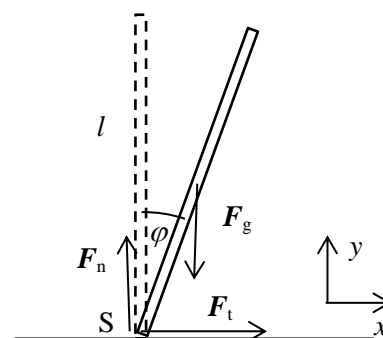


57. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2015/2016
Kategória A – celoštátne kolo
 riešenie úloh

1. Pád tyče

a) Na padajúcu tyč v sústave podložky pôsobia tri sily: F_g – tiažová sila v ťažisku (strede) tyče, F_n – normálová tlaková sila podložky a F_t – sila statického trenia až do dosiahnutia uhlu φ_m , obr. RA-1. V rovine pádu tyče smer rovnobežný s F_t označíme $+x$, smer rovnobežný s F_n označíme $+y$.



Obr. RA-1

b) Tyč pri uhloch sklonu $\varphi < \varphi_m$ sa otáča okolo dolného konca S.

Pre pohyb tyče platia rovnice postupného pohybu ťažiska

$$m a_x = F_t \quad (1)$$

$$m a_y = F_n - F_g \quad (2)$$

a rovnica otáčania tyče okolo bodu S

$$J \alpha = F_g \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad (3)$$

kde a_x , a_y sú vodorovná a zvislá zložka zrýchlenia ťažiska tyče, α uhlové zrýchlenie tyče.

Rýchlosť ťažiska určíme pomocou zákona zachovania mechanickej energie tyče, ako pevného telesa

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = m g \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi),$$

kde uhlová rýchlosť tyče $\omega = \frac{2v}{l}$.

Odtiaľ máme

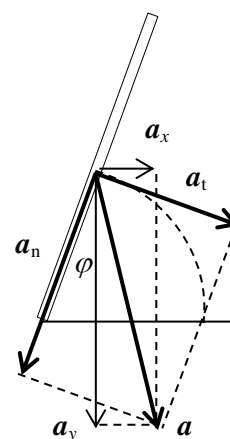
$$v = \sqrt{\frac{3}{4} g l (1 - \cos \varphi)}. \quad (4)$$

Ťažisko sa pohybuje po kružnici so stredom S a polomerom $l/2$. Vektor zrýchlenia má dotyčnicovú zložku a_t a dostredivú zložku a_n , obr. RA-2, pričom platí

$$a_n = \frac{2v^2}{l}, \quad a_t = \frac{l}{2} \alpha, \quad a^2 = a_t^2 + a_n^2. \quad (5)$$

S použitím (3) a (4) dostaneme

$$a = \sqrt{\left(\frac{l}{2} \alpha\right)^2 + \left(\frac{2v^2}{l}\right)^2} = \frac{3}{4} g \sqrt{\sin^2 \varphi + 4(1 - \cos \varphi)^2}. \quad (6)$$



Obr. RA-2

- c) Podľa obr. RA-2 máme $a_x = a_t \cos \varphi - a_n \sin \varphi$, $a_y = a_t \sin \varphi + a_n \cos \varphi$,
a teda z (1), pomocou (4) a (5) a úpravou, dostaneme

$$F_t = m g \frac{3}{4} \sin \varphi (3 \cos \varphi - 2)$$

a z (2)

$$F_n = m g \left[1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi - \frac{3}{2} \cos \varphi (1 - \cos \varphi) \right].$$

- d) Tabuľka pre vyplnené hodnoty

$\varphi /$ stupeň	0	3	6	9	12	$\varphi_m \approx 11,6$
F_t / N	0,00	0,38	0,76	1,11	1,43	1,39
F_n / N	9,81	9,77	9,65	9,45	9,18	9,22
$fF_n - F_t / \text{N}$	1,47	1,09	0,69	0,31	-0,05	-0,01

Podmienka statickej rovnováhy je $fF_n - F_t > 0$. Z tabuľky vidno, že $\varphi_m \approx 12^\circ$. Pri presnejšej aproximácii $\varphi_m \approx 11,6^\circ$.

Plný počet bodov aj v prípade výsledku $\varphi_m \approx 12^\circ$.

2. Pathfinder

- a) Ide o šikmý vrh v tiažovom poli s tiažovým zrýchlením g_M .

Ak dopadne sonda na povrch Marsu rýchlosťou v_0 pod uhlom α , odrazí sa pod rovnakým uhlom rýchlosťou $v_1 = k v_0$. Po odraze nadobudne maximálnu výšku šikmého vrhu

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2 g_M} \sin^2 \alpha$$

a dolet $d_1 = \frac{v_1^2}{g_M} 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Z pomeru obidvoch rovníc máme

$$\frac{h_1}{d_1} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \alpha, \text{ odtiaľ } \alpha = \arctg \left(\frac{4h_1}{d_1} \right), \text{ pre dané hodnoty } \alpha \approx 31^\circ.$$

- b) Graf na obr. A-1 poskytuje informáciu o intervaloch medzi jednotlivými odrazmi sondy od povrchu Marsu. Doba medzi n -tým odrazom a následným $(n+1)$ -tým odrazom

$$T_n = \frac{2v_n}{g_M} \sin \alpha = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g_M} k^n.$$

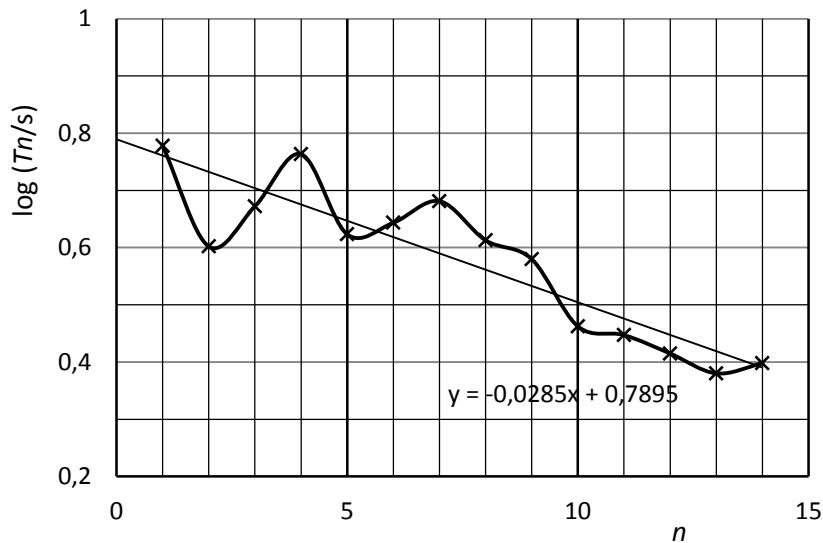
$$\log T_n = \log \left(\frac{2v_0 \sin \alpha}{g_M} \right) + n \log k = A + B n, \quad (1)$$

kde $A = \log \left(\frac{2v_0 \sin \alpha}{g_M} \right)$ a $B = \log k$.

Grafom funkcie (1) $y = f(x)$, kde $x = n$ a $y = \log T_n$, je priamka so smernicou B a úsekom A na y -osi.

Zo záznamu akcelerometra určíme hodnoty

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
T_n/s	6,0	4,0	4,7	5,8	4,2	4,4	4,8	4,1	3,8	2,9	2,8	2,6	2,4	2,5



Ak hodnotami preložíme najpravdepodobnejšiu priamku, máme $A \approx 0,790$ a $B \approx -0,0285$.

Pomocou týchto hodnôt určíme

$$k = 10^B \approx 0,94$$

$$g_M = \frac{2v_0 \sin \alpha}{10^A} \approx 3,34 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

c) Podľa Newtonovho gravitačného zákona platí

$$g_M = G \frac{M_M}{R_M^2}, \text{ pre dané hodnoty } g_M \approx 3,70 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Relatívna odchýlka experimentálnej hodnoty od teoretickej je $\delta \approx -10\%$, čo je pomerne dobrá zhoda.

3. Kepler 452b

a) Pre pohyb po kružnicovej trajektórii platí

$$G \frac{M_H M_K}{r_K^2} = M_K \omega^2 r_K, \text{ kde } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Odtiaľ máme

$$r_P = \sqrt[3]{G \frac{M_H}{4\pi^2} T^2}. \text{ Pre dané hodnoty } r_P \approx 1,57 \times 10^{11} \text{ m} = 1,05 r_Z.$$

b) Gravitačné zrýchlenie na povrchu planéty

$$g_P = G \frac{M_P}{R_P^2}. \text{ Pre dané hodnoty } g_P \approx 19,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \approx 1,9 g_Z.$$

c) Podľa Stefanovho–Boltzmannovho zákona výkon vyžarovaný hviezdou ako čiernym telesom

$$P_H = 4\pi R_H^2 \sigma T_H^4.$$

Z rovnosti výkonu dopadajúceho na planétu a výkonu planétou vyžiareného

$$\frac{P_H}{4\pi r_p^2} \pi R_p^2 = 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4$$

dostaneme teplotu povrchu planéty

$$T_p = T_H \sqrt{\frac{R_H}{2 r_p}}, \text{ pre dané hodnoty } T_p \approx 286 \text{ K} \approx 12 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Z predchádzajúcich výsledkov je zrejmé, že pomery na objavenej planéte sa nelíšia podstatne od pomerov na Zemi a mohla by byť obývatelná.

d) Z celkového výkonu P_H hviezdy dopadá na plochu zrkadla teleskopu výkon

$$P = \frac{P_H}{4\pi d^2} \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4d^2} R_H^2 \sigma T_H^4. \text{ Pre dané hodnoty } P \approx 3,26 \times 10^{-13} \text{ W}.$$

Zodpovedajúci počet fotónov

$$N = \frac{P \tau}{h c} \lambda. \text{ Pre dané hodnoty veličín } N \approx 9,01 \times 10^5.$$

e) Ak sú dva body, ktorých spojnice s dĺžkou x je kolmá na smer pozorovania, vo vzdialenosti d od pozorovateľa, ich uhlová vzdialenosť $\theta = x/d$. Zo vzťahu uvedenom v zadaní úlohy pre najmenšiu vzdialenosť, aby body boli rozlíšiteľné, máme

$$x = 1,22 \frac{\lambda}{D} d.$$

Pre vlnovú dĺžku 340 nm $x \approx 3,93 \times 10^{12} \approx 25 r_p$,

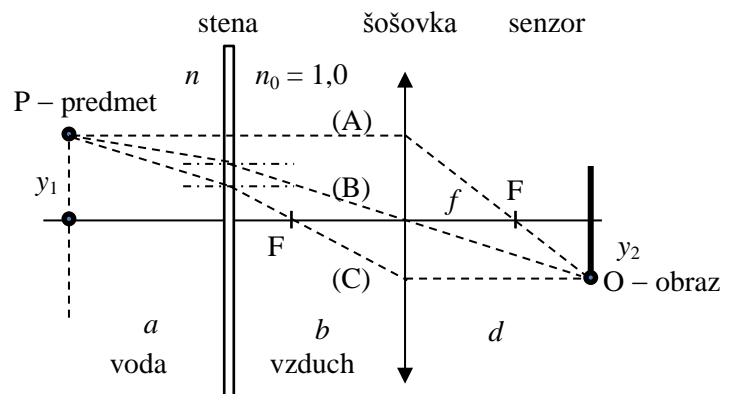
pre vlnovú dĺžku 890 nm $x \approx 10,3 \times 10^{12} \text{ m} \approx 65 r_p$.

Teleskop nemôže „vidieť“ planétu osobitne, ale to by nemohol ani pri dostatočne veľkom priemere objektívu, lebo planéta nie je výkonným zdrojom žiarenia.

Existenciu planéty a dobu jej obehu okolo hviezdy určili pomocou merania pravidelného poklesu intenzity žiarenia hviezdy spôsobeného zákrytom hviezdy planétou.

4. Fotografia rybičky v akváriu

a) Predmet P je vhodné umiestniť mimo optickej osi, obr. RA-3. Lúč (A) rovnobežný s optickou osou sa pri prechode z vody do vzduchu neláme a na šošovke sa láme do ohniska. Lúč (B), ktorý sa neláme na šošovke (prechádza jej stredom) sa láme pri prechode z vody do vzduchu. Lúč (C) prechádzajúci predmetovým ohniskom pri prechode do vody sa láme. Obraz O predmetu P vzniká v priesečníku lúčov. Ku konštrukcii obrazu stačia dva z uvedených troch lúčov.



Obr. RA-3

b) Pre lúč (A) platí

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{f}{d-f}. \quad (1)$$

Lúč (B) dopadá na stenu akvária pod uhlom α a láme sa pod uhlom β , pričom platí $n_0 \sin \beta = n \sin \alpha$.

Podľa obrázku RA-3 vyjadríme vzťahy

$$y_1 = a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta \quad \text{a} \quad y_2 = d \operatorname{tg} \beta.$$

Po dosadení za y_1 a y_2 do vzťahu (1) máme

$$\frac{a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta}{d \operatorname{tg} \beta} = \frac{f}{d-f}. \quad (2)$$

Pre malé uhly α a β platí

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n, \text{ teda } \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \approx n.$$

Po dosadení tohto výrazu do (2) a úprave máme

$$\frac{a+n b}{n d} = \frac{f}{d-f}, \text{ resp. } d = \frac{(a+n b)f}{a+n(b-f)}.$$

Pre dané hodnoty $d \approx 37,1$ mm.

Pozn.: Pri správnom postupe, ale neúplnom riešení, možno prideliť v častiach a) a b) aj primeraný menší počet bodov.

57. ročník Fyzikálnej olympiády – Teoretické úlohy celoštátneho kola kategórie A

Autori návrhov úloh: Ivo Čáp, Ľubomír Mucha, Aba Teleki + Boris Lacsny, Ľubomír Konrád

Recenzia a úprava: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016