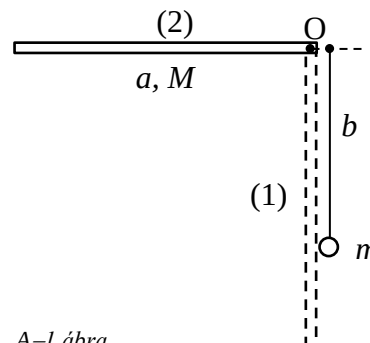


**57. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2015/2016
Kategória A – krajské kolo
texty úloh**

1. A rúd ütközése

Egy a hosszúságú és M tömegű rúd függ egyik végén felakasztva a vízszintes O tengelyen, amely szilárdan a falba van ékelve. A rúd szabadon foroghat az O tengely körül. Nyugalmi állapotában függőlegesen lóg (1), érintkezve az m tömegű $b < a$ hosszúságú vékony fonálon függő kis golyóval. A fonál felfüggesztési pontja ugyanabban a magasságban van, mint az O tengely. A fonál szilárdságán a legkisebb F_p feszítő erő nagyságát értjük, amelynél a fonál elszakad. A rudat a nyugalmi (1) helyzetéből kitérítjük a vízszintes (2) helyzetbe (lásd az A–1 ábrát), majd elengedjük. Amint újra függőleges helyzetébe kerül, ütközik a golyóval. Az ütközés tökéletesen rugalmas.



A–1 ábra

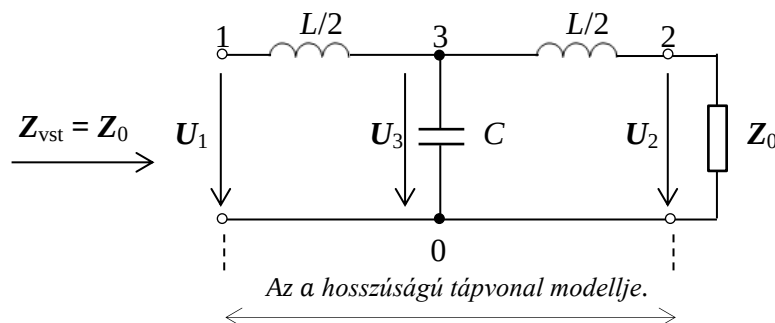
- Elemezzék tömören fizikai szempontból a rúd és golyó ütközésének folyamatát, és sorolják fel az érvényesülő fizikai törvényeket!
- Vezessék le a golyó, közvetlenül az ütközés után elért v sebességének nagyságát! Határozzák meg a fonál b_m hosszát, amelynél a v sebesség értéke maximális (v_m)! Számítsák ki v_m értéket!
- Határozzák meg a fonál hosszának b_p értékét, amelynél a fonalat feszítő erő a rúddal történő ütközés után maximális! Mekkora kell lennie a fonál F_p szilárdságának, hogy a fonál ne szakadjon el, bármilyen legyen is a fonál b hossza?

A feladatot oldják meg általánosan, majd a következő értékekre: $M = 150$ g, $m = 80$ g, $a = 75$ cm, $g = 9,8$ m · s⁻²!

Egy vékony a hosszúságú és M tömegű rúd tehetetlenségi nyomatéka, a rúd végén a rúdra merőlegesen áthaladó tengelyre számítva, $I = (1/3)Ma^2$. A tengelyben fellépő súrlódás, a mozgásoknál fellépő légellenállás és a fonál megnyúlása elhanyagolhatóan kicsik.

2. Elektromos vezeték

Az elektromos vezeték, tápvezeték (két párhuzamos vezető vagy koaxiális kábel) egy rövid szakaszát az A–2 ábrán látható kapcsolási sémával lehet modellezni. Itt L a vezetők induktivitása, C pedig a kölcsönös kapacitásuk. A tápvezeték egységnyi hosszra eső induktivitását L^* -val, míg az egységnyi hosszra eső kapacitását C^* -val jelöljük. Tételezzék fel, hogy a tápvezeték bemenetéhez (az A–2 ábra baloldala) harmonikus feszültségű áramforrás csatlakozik!



A–2 ábra

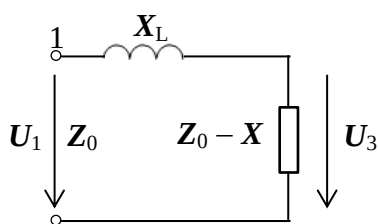
A tápvezeték fontos jellemzője az ún. *hullám-impedancia* (Z_0), amely meghatározása a következő: ha a tápvezeték kimenetén Z_0 impedanciájú fogyasztó van, a bemeneten jelentkező impedancia ugyanolyan $Z_{vst} = Z_0$. Ez érvényes a tápvezeték rövid szakaszára is (lásd az A–2 ábrát).

- a) Határozzák meg a tápvonal Z_0 hullám-impedanciáját az A-2 ábrán feltüntetett modell segítségével, valamint az f_k kritikus frekvenciát, amelynél a Z_0 hullám-impedancia nulla lesz! A Z_0 impedancia komplex mennyiség. Határozzák meg $Z_0 = |Z_0|$ abszolút nagyságát a bemeneti feszültség $f < f_k$ valamint $f > f_k$ frekvenciákra! Mutassák meg, hogy amennyiben $f \ll f_k$, akkor $Z_0 = R_0$, és nem függ a frekvenciától; amennyiben $f \gg f_k$ az ábrázolt szakasz egy L_0 indukciójú induktorként működik, és az indukciója nem függ a frekvenciától! Határozzák meg R_0 és L_0 értékét!

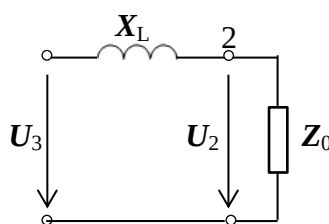
A tápvonal egy másik jellemzője az $A_{U0} = U_2/U_1$ feszültség-átviteli tényező, a kimeneti és bemeneti feszültség aránya a Z_0 hullám-impedanciájú fogyasztó csatlakoztatásakor.

- b) Határozzák meg az A-2 ábrán feltüntetett szakasz A_{U0} feszültség-átviteli tényezőjét: fejezzék ki a Z_0 hullám-impedancia és az $L/2$ indukciójú induktor X_L induktanciája segítségével!

Útmutatás: számítsák ki a fázorok U_3/U_1 arányát az első feszültségosztón (A-2a ábra), majd a fázorok U_3/U_1 arányát a második feszültségosztón (A-2b ábra)! Határozzák meg segítségével az $A_{U0} = U_2/U_1$ feszültség-átviteli tényezőt!



A-2a ábra



A-2b ábra

- c) Mutassák meg, hogy amennyiben $f < f_k$, a feszültség-átviteli tényező nagysága $A_{U0} = |A_{U0}| = 1$; amennyiben $f > f_k$, akkor $A_{U0} = |A_{U0}| < 1$! Határozzák meg mindkét esetben a kimeneti és bemeneti feszültség φ_{U0} fáziskülönbségét!

Az L^* egységnyi hosszra eső indukciójú és C^* egységnyi hosszra eső kapacitású tápvonal modelljét N egymás után csatlakoztatott a hosszúságú, rövid (A-2 ábra) szakasz láncolataként képzeljék el! Tételezzék fel, hogy az utolsó szakaszhoz Z_0 impedanciájú fogyasztó csatlakozik! Amennyiben a láncolat bemenetéhez harmonikus feszültségű áramforrás csatlakozik, a tápvonalon csillapítatlan harmonikus feszültségű hullám terjedhet. A feszültség-hullámot az $U_n = U_1 \sin(\omega t - nka)$ hullámfüggvény írja le. Itt U_n az n -ik szakasz bemeneti feszültsége, $k = \omega/c$ a hullámszám, c a hullám terjedésének fázissebessége a láncolaton.

- d) Milyen feltétel mellett terjedhet csillapítatlan feszültség-hullám a láncolaton? Határozzák meg a c fázissebességet nagyon alacsony $f \ll f_k$ frekvenciákra az a hosszúságú szakaszon keletkező φ_{U0} fáziseltolódás segítségével!

A számításoknál a következő értékekkel számoljanak:

$$a = 10 \text{ cm}, L^* = L/a = 3,2 \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}, C^* = C/a = 1,2 \times 10^{-10} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Megjegyzés: Kis értékekre ($|x| \ll 1 \text{ rad}$) közelítőlegesen érvényes $\text{tg } x \approx x$, ill. $\text{arctg } x \approx x$.

3. Az optikai lencse

Az $n_0 = 1,33$ törésmutatójú víz felszínén egy gömbhéj alakú nagyon vékony átlátszó héj úszik, amely görbületi sugara $R = 5,0$ cm. A héjat $n_1 = 1,42$ törésmutatójú átlátszó folyadék tölti ki – vékony síkdomború optikai lencsét alkot sík felső oldallal. A vizet tartalmazó edény alján egy $17,3 \times 13,0$ mm² méretű optikai érzékelő (szenzor) van, amely felbontása 6,0 Mpx (megapixel). A leírt optikai rendszert a víz szintje feletti $H \gg R$ magasságból egy pontszerű LED fényforrás világítja meg – a fény hullámhossza $\lambda_0 = 520$ nm (A-3 ábra).

- a) Határozzák meg az edényben levő vízszint h_0 magasságát, amely-nél a szenzor által érzékelt fényfolt a legkisebb lesz! Készítsenek vázlatot, és vázolják fel benne, az optikai lencsén kívül a jellegzetes fénysugarakat is – vezessék le a megfelelő képletet!

A pixel (más néven *képpont*) olyan elemi, legkisebb része a szenzor felszínének, amely teljes információt ad a fény intenzitásáról és színéről az adott pontban. Tételezzék fel, hogy a szenzor minden pixele egy a oldalhosszúságú négyzet a szenzor felületén!

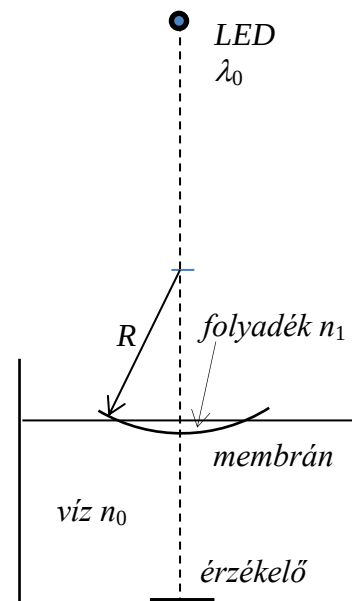
- b) Határozzák meg a szenzor pixelének a oldalhosszát!

A fénysugarak fókuszálódásakor diffrakció jön létre, amely korlátozza a sugarak egyetlen geometriai pontba gyűjtését.

- c) Határozzák meg az edény közepén úszó héjban levő folyadék közelítőleges y mélységét, hogy a sugarak, a diffrakció ellenére, egyetlen pixelre fókuszálódjanak!

Az optikai lencséről tételezzék fel, hogy vékony, a lencsére eső sugarak párhuzamosak, valamint hogy a héjban levő folyadék és a víz szintje egy síkban van!

Kis szögekre érvényes a következő közelítőleges összefüggés: $\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha$.



A-3 ábra

4. A Bóhr-féle atommodell

Niels Bohr¹ két dolgozatban, 1913 áprilisában és májusában² tette közzé jelentős felfedezését a kvantumfeltételről. A kvantumfeltételt a következő posztulátum mondja ki: egy elektron az atomban csak olyan körpályákon mozoghat sugárzás nélkül, amelyeken a pályaperdület (orbitális impulzusmomentum) a $\hbar \equiv h/(2\pi) = 1,054 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ redukált Planck-állandó egészszámu többszöröse

$$L = n\hbar, \text{ ahol } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Az n egész szám az elektron állapotát leíró *főkvantumszám*. Eltérő n értékeknek az elektron más-más állapota felel meg az atomban. Az elektront az atommag elektromos vonzóereje tartja körpályán.

- a) A hidrogénatom elektronja, a Bohr-féle atommodellben mint pontrészcseke, körpályán kering a proton körül. Készítsenek vázlatot, és vázolják fel benne az elektronra ható erőket! Határozzák meg a pálya r_n sugarának képletét, ha az elektron pályaperdületének nagysága $L_n = n\hbar$! Számítsák ki a hidrogénatom r_1 sugarát alapállapotban ($n = 1$)!
- b) Határozzák meg az elektron gyorsulásának a_1 nagyságát, T_1 keringési idejét és teljes E_1 energiáját alapállapotban ($n = 1$)!

Maxwell elektrodinamikája alapján egy elektromos töltéssel bíró részecske, amely gyorsuló mozgást végez, elektromágneses sugárzást kelt. A sugárzás teljesítménye (P) a részecske gyorsulásának nagyságától (a) és a részecske elektromos töltésétől (q) a következő alakban függ

$$P = K c^\alpha \varepsilon_0^\beta q^\gamma a^\delta, \quad (2)$$

ahol K egy mértékegység nélküli szám, $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a fény terjedési sebessége vákuumban és $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ a vákuum permittivitása.

- c) Határozzák meg a (2) képletben szereplő α, β, γ és δ kitevőket dimenzióanalízis segítségével, és adják meg a P teljesítmény konkrét alakját (2)-ben. Határozzák meg – (2) konkrét alakjából, valamint feltételezve, hogy $K \approx 1,00$ – mekkora teljesítménnyel (P) kéne sugároznia a hidrogénatom elektronjának alapállapotban!
- d) Határozzák meg a keringések N_1 számát és a megfelelő időtartamot, amely alatt az elektron E_1 energiája alapállapotban (P teljesítményű sugárzás mellett) 1 %-val csökkenne!

Tételezzék fel, hogy az elektron $m = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ tömege elhanyagolhatóan kicsi a proton tömegéhez viszonyítva! Az elektron elektromos töltésének nagysága $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$.

¹ Niels Bohr, dán fizikus, az atomszerkezet és a kvantummechanika tudományterületén dolgozott. Tudományos kutatásai elismeréseként 1922-ben elnyerte a fizikai Nobel-díjat.

² N. Bohr: On the Constitution of Atoms and Molecules (Az atomok és molekulák szerkezetéről), Philos. Mag., vol. 26, no.1 p. 1, a Philos. Mag., vol. 26, no. 1 p. 476.