57. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2015/2016
Krajské kolo kategórie D
Riešenie úloh

1. *Zvislý vrh*

Riešenie:

a) Pre rovnomerne zrýchlený pohyb lopty smerom nahor platia vzťahy

$$v = v_0 - g\,t\,, \qquad h = v_0\,t - \frac{1}{2} g\,t^2\,. \qquad (1)$$

V najvyššom bode trajektórie $v = 0$, a teda čas výstupu $t_\mathrm{H} = \dfrac{v_0}{g}$. Po dosadení

$H = \dfrac{v_0^2}{2g}$, pre dané hodnoty $H \approx 11{,}5$ m. 2b

b) Pre prvú loptu máme

$$v_1 = v_0 - g\,t \qquad h_1 = v_0\,t - \frac{1}{2} g\,t^2, \qquad (2)$$ 1b

pre druhú loptu

$$v_2 = -v_0 - g\,t \qquad h_2 = H - v_0\,t - \frac{1}{2} g\,t^2. \qquad (3)$$ 1b

Pre okamih t_s stretnutia $h_1 = h_2 = h_\mathrm{s}$

$$v_0\,t_\mathrm{s} - \frac{1}{2} g\,t_\mathrm{s}^2 = H - v_0\,t_\mathrm{s} - \frac{1}{2} g\,t_\mathrm{s}^2\,.$$

odkiaľ máme

$t_\mathrm{s} = \dfrac{H}{2v_0} = \dfrac{v_0}{4g}$, pre dané hodnoty $t_\mathrm{s} \approx 0{,}382$ s. 2b

c) Po dosadení za čas $t = t_\mathrm{s}$ do vzťahu pre výšku

$h_\mathrm{s} = v_0\,t_\mathrm{s} - \dfrac{1}{2} g\,t_\mathrm{s}^2 = \dfrac{v_0^2}{4g} - \dfrac{v_0^2}{32g} = \dfrac{7\,v_0^2}{32g}$, pre dané hodnoty $h_\mathrm{s} \approx 5{,}02$ m. 2b

d) Rýchlosti lôpt v okamihu stretnutia

$$v_\mathrm{s1} = v_0 - g\,t_\mathrm{s} = v_0 - g\,\frac{v_0}{4g} = \frac{3}{4} v_0\,,$$

$v_\mathrm{s2} = -v_0 - g\,t_\mathrm{s} = -v_0 - g\,\dfrac{v_0}{4g} = -\dfrac{5}{4} v_0$ (veľkosť rýchlosti $v_\mathrm{s2} = \dfrac{5}{4} v_0$).

Pre dané hodnoty veľkosti rýchlostí $v_\mathrm{s1} \approx 11{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_\mathrm{s2} \approx 18{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 2b

2. *Spájanie vagónov*

Riešenie:

a) Pri zrážke platí zákon zachovania hybnosti (ZZH), lebo v sústave nepôsobila sila, ktorá by znížila hybnosť sústavy

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2)\, v_T ,$$

odkiaľ máme

$v_T = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v_0$. Pre dané hodnoty $v_T \approx 0{,}963\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 3{,}5\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. 2b

b) Pred zrážkou mal plný vagón kinetickú energiu

$E_{k0} = \dfrac{1}{2} m_1 v_0^2$. Pre dané hodnoty $E_{k0} \approx 56{,}3$ kJ. 1b

Kinetická energia spojených vagónov po zrážke

$E_{kT} = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v_T^2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_0^2$. Pre dané hodnoty $E_{kT} \approx 37{,}6$ kJ. 1b

c) Z b) vyplýva $E_{k0} > E_{kT}$. K zníženiu kinetickej energie o hodnotu $\Delta E \approx 18{,}7$ kJ došlo v pružinách vagónov vo forme zvýšenia ich vnútornej energie. 2b

d) Ak sa vagóny nespoja, sú rýchlosti vagónov po zrážke rôzne, pričom podľa ZZH

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 . \qquad (1) \qquad 1b$$

Pružiny po náraze nezostanú stlačené, a svoju energiu odovzdávajú vagónom (dokonale pružná zrážka), a teda platí

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 . \qquad (2) \qquad 1b$$

Výrazy (1) a (2) možno upraviť na tvar

$$v_0 - v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 , \qquad (3)$$

$$v_0^2 - v_1^2 = (v_0 - v_1)(v_0 + v_1) = \frac{m_2}{m_1} v_2^2 . \qquad (4)$$

Z pomeru rovností (4) a (3) máme

$$v_0 + v_1 = v_2 . \qquad (5)$$

Riešením sústavy rovníc (3), (5) dostávame

$$v_2 = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 .$$

Pre dané hodnoty $v_1 \approx 1{,}7\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v_2 \approx 6{,}9\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. 2b

Z výsledku vidno, že nezachytenie vagónov môže viesť k udeleniu značnej rýchlosti prázdnemu vagónu.

3. *Nová planéta*

Riešenie:

a) Priemerná hustota Zeme

$$\rho_Z = \frac{M_Z}{V_Z} = \frac{3}{4}\frac{M_Z}{\pi R_Z^3}$$. Pre dané hodnoty $\rho_Z \approx 5{,}51 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. 2b

b) Pohybové rovnice pre umelú družicu s hmotnosťou m pohybujúcu sa v blízkosti povrchu planéty a v blízkosti povrchu Zeme majú tvar

$$G\frac{mM_p}{R_p^2} = m\frac{v_p^2}{R_p}, \qquad G\frac{mM_Z}{R_Z^2} = m\frac{v_Z^2}{R_Z}.$$ 2b

Pre prvú kozmickú rýchlosť Zeme a planéty potom platí

$$v_Z = \sqrt{G\frac{M_Z}{R_Z}} \qquad v_p = 2\,v_Z = \sqrt{G\frac{M_p}{R_p}}.$$ 1b

Pre dané hodnoty $v_Z \approx 7{,}91\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$, $v_p \approx 15{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$. 1b

c) Pre rovnaké priemerné hustoty planéty a Zeme $\rho_p = \rho_Z = \rho$ máme

$$v_p = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho R_p^2}, \qquad v_Z = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho R_Z^2}.$$

Delením týchto vzťahov dostaneme

$$p_1 = \frac{R_p}{R_Z} = \frac{v_p}{v_Z}$$. Pre dané hodnoty veličín $p_1 = 2$. 2b

Perióda obehu družice po kružnicovej trajektórii

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Hľadaný pomer je potom

$$p_2 = \frac{T_p}{T_Z} = \frac{\dfrac{2\pi R_p}{v_p}}{\dfrac{2\pi R_Z}{v_Z}} = \frac{R_p\, v_Z}{R_Z\, v_p} = 1.$$ 2b

Obežné doby sú teda v oboch prípadoch rovnaké.

4. *Hustomer*

Riešenie:

a) Pre plávajúcu skúmavku je splnený Archimédov zákon

$$m g = S\, h\, \rho\, g ,$$ 1b

kde S je obsah priečneho prierezu skúmavky a h výška ponorenej časti skúmavky. Po vložení skúmavky do vody a potom do neznámej kvapaliny máme

$S\, h_0\, \rho_0\, g = S\, h_1\, \rho_1\, g$, odkiaľ

$\dfrac{h_0}{l}\, \rho_0 = \dfrac{h_1}{l}\, \rho_1$, resp. $\rho_1 = \dfrac{p_0}{p_1}\, \rho_0$. Pre dané hodnoty $\rho_1 \approx 824\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. 2b

b) Hustota kvapaliny po pridaní vody

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_0 V_2}{V_1 + V_2} .$$ 2b

Hĺbka ponorenia skúmavky

$$h_0\, \rho_0 = h_2\, \rho_2 = h_2\, \frac{\rho_1 V_1 + \rho_0 V_2}{V_1 + V_2} = h_2\, \frac{\dfrac{p_0}{p_1} V_1 + V_2}{V_1 + V_2}\, \rho_0 \ .$$ 2b

Odtiaľ máme

$$\frac{h_2}{l} = \frac{h_0}{l}\, \frac{p_1}{p_0 \dfrac{V_1}{V_1 + V_2} + p_1 \dfrac{V_2}{V_1 + V_2}} , \text{ resp. } p_2 = \frac{p_0\, p_1\, (1 + k)}{p_0 + k\, p_1} .$$

Z toho určíme pomer zmiešania

$k = \dfrac{p_0 (p_1 - p_2)}{p_1 (p_2 - p_0)}$. Pre dané hodnoty $k \approx 1{,}24$. 3b

57. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie D*

Autori úloh: Kamil Bystrický (1), Ľubomír Konrád (2-4)
Recenzia a úprava: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha

Preklad textu do maďarského jazyka: Aba Teleki

Redakcia: Ivo Čáp

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016