

**58. ročník Fyzikálnej olympiády**  
**v školskom roku 2016/2017**  
**Kategória A – celoštátne kolo**  
**Žilina – 8. 4. 2017**  
*text teoretických úloh*

**1. Gule na naklonenej rovine**

V škole pripravili experiment s naklonenou rovinou. K dispozícii mali dve gule z rovnakého materiálu a s rovnakým polomerom  $R_1$ . Prvá bola plná, v druhej z nich bola sústredná vzduchová guľová dutina. Pomer hmotností oboch guľ bol  $p = M_1/M_2 > 1$ . Naklonená rovina je drevená doska s dĺžkou  $L$  a uhlom sklonu  $\alpha$  vzhľadom na vodorovnú rovinu. Faktor trenia medzi povrchom gule a doskou je  $f$ .

- a) Odvodte vzťah pre pomer  $r = R_1/R_2$  polomerov gule a dutiny ako funkciu pomeru  $p$ .
- b) Odvodte vzťah pre pomer  $k = I_1/I_2$  momentu zotrvačnosti  $I_1$  plnej a momentu zotrvačnosti  $I_2$  dutej gule vzhľadom na geometrickú os prechádzajúcu stredmi guľ, ako funkciu pomeru  $p$ .
- c) Nakreslite obrázok gule na naklonenej rovine a znázornite symbolmi (vektormi) všetky sily, ktoré pôsobia na guľu. Napíšte názvy pôsobiacich síl.
- d) Obidve gule položíme na horný okraj dosky a uvoľníme ich. Odvodte podmienku, pri splnení ktorej sa guľa pri pohybe na doske neprešmykuje a pohybuje sa valivým pohybom. V akom prípade guľa po povrchu dosky prešmykuje?
- e) Odvodte vzťahy pre zrýchlenie  $a_v$  hmotného stredu gule pre prípad valivého pohybu a  $a_k$  pohybu s prešmykovaním.
- f) Meriame čas pohybu guľ k dolnému koncu dosky  $t_1$  a  $t_2$ . Určte relatívny rozdiel časov  $\tau = (t_1 - t_2)/t_1$  ako funkcie pomeru  $p$  pre uhly sklonu dosky  $\alpha_1 = 10^\circ$ ,  $\alpha_2 = 20^\circ$  a  $\alpha_3 = 30^\circ$ .

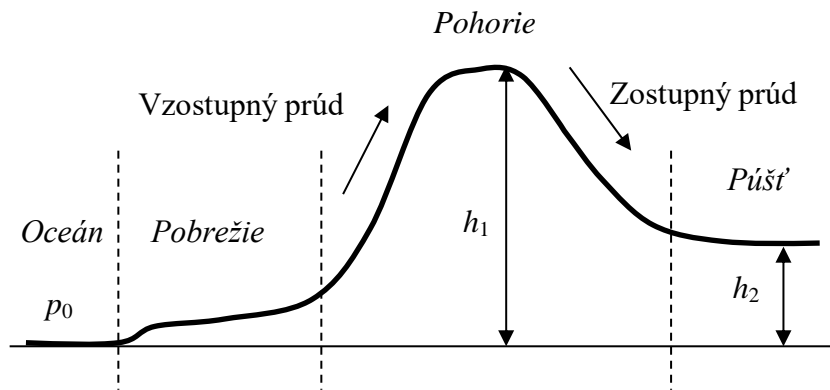
Valivý odpor pri pohybe guľ je zanedbateľný.

Úlohu riešte všeobecne a pre hodnoty:  $p = 2,5$ ;  $f = 0,12$ .

Moment homogénnej gule s hmotnosťou  $m$  a polomerom  $R$  vzhľadom na os prechádzajúcu jej stredom  $I = (2/5) m R^2$ .

## 2. Vysušujúci vietor

V Skalnatých horách (*Rocky Mountains*) v USA prúdi vzduch zvyčajne zo západu z oceánu na východ do vnútrozemia. Keď prúd vlhkého vzduchu stúpa na západnej strane pohoria, ochladzuje sa a stráca vlhkosť. Na východnej strane vzduch zbavený vlhkosťou klesá, zohrieva sa a jeho tlak rastie, čo prináša veľké a rýchle oteplenie na úpätí hôr (tento typický teplý, suchý a padavý vietor typu *fén* je označovaný v USA ako „*chinook wind*“). V dôsledku toho sa na východ od Skalnatých hôr vytvorila púšť, obr. A3–2.



Obr. A3–2

Zmeny termodynamického stavu pri stúpaní a klesaní vzduchu možno považovať za polytropický dej, pre ktorý platí rovnica  $pV^k = p_0V_0^k$ , kde  $p$ ,  $V$  je tlak a objem plynu v danom mieste,  $p_0$ ,  $V_0$  tlak a objem rovnakého množstva plynu vo východiskovom mieste, polytropická konštanta  $1 < k < \kappa$  ( $\kappa$  je adiabatická konštanta). Tlak vzduchu na hladine oceánu  $p_0 = 101$  kPa a teplota  $t_0 = 25$  °C. Vzduch stúpa do nadmorskej výšky  $h_1 = 4\,420$  m (Mount Whitney, Sierra Nevada) a potom klesá do nadmorskej výšky  $h_2 = 610$  m (Las Vegas, Mojave Desert).

- a) Dokážte, že teplota  $T$  vzduchu pri jeho stúpaní alebo klesaní je lineárnou funkciou nadmorskej výšky  $h$ . Určte koeficient  $K = \Delta T / \Delta h$ , teplotu prúdu vzduchu vo výškach  $h_1$  a  $h_2$ .

Najnepriaznivejší vplyv prúdenia vzduchu cez hory spočíva vo vysúšaní krajiny na východ od pohoria. Na východ od pohoria Sierra Nevada je Nevadská púšť, kde sa nachádza Dead Valley, najsuchšie a najteplejšie miesto v Severnej Amerike. Predpokladajte, že vzduch pri hladine oceánu má relatívnu vlhkosť  $\eta_0 = 70$  % pri teplote  $t_0 = 25$  °C. Pri stúpaní vzduchu jeho teplota klesá a relatívna vlhkosť  $\eta$  rastie. Keď relatívna vlhkosť dosiahne 100 %, začne para kondenzovať. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené hodnoty tlaku  $p_n$  nasýtenej vodnej pary pre rôzne teploty  $t$  pary.

$t$ (°C)	-10	-5,0	0,0	5,0	10,0	15,0	20,0	25,0
$p_n$ (kPa)	0,29	0,42	0,61	0,87	1,23	1,70	2,34	3,17

Pozn.: Relatívna vlhkosť je definovaná pomerom parciálneho tlaku  $p_p$  pary a tlaku  $p_n$  nasýtenej pary pri danej teplote,  $\eta = p_p / p_n$ .

- b) Odvodte vzťah pre závislosť parciálneho tlaku  $p_p$  pary od teploty, ak pre paru platí rovnica polytropického deja s rovnakou konštantou  $k$  ako pre vzduch.  
Určte parciálny tlak  $p_{p0}$  pary pri hladine mora.
- c) Zostrojte do spoločného grafu tlak nasýtenej pary  $p_n$  a parciálny tlak  $p_p$  pary ako funkcie teploty  $t$  a určte teplotu  $t_n$ , kedy sa para v stúpajúcom vzduchu stáva nasýtená. Určte nadmorskú výšku  $h_m$ , v ktorej sa začnú vytvárať mraky.
- d) Určte parciálny tlak  $p_{p1}$  a  $p_{p2}$  pary vo vzduchu a relatívne vlhkosti  $\eta_1$  a  $\eta_2$  vzduchu vo výškach  $h_1$  a  $h_2$ . Hodnotu  $\eta_2$  porovnajte s optimálnou relatívnou vlhkosťou okolo 50 %.

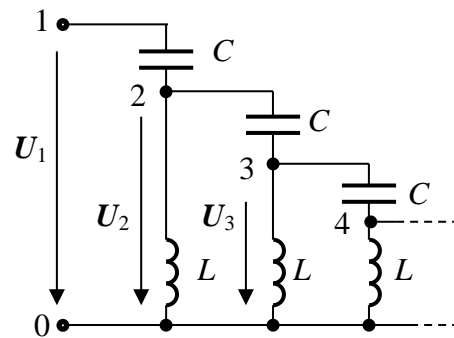
Molárna hmotnosť vzduchu  $M_v 29 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , molárna plynová konštantá  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , polytropická konštantá vlhkého vzduchu  $k \approx 1,30$ .

Vlhký vzduch považujte za ideálny plyn.

### 3. Mnohonásobný delič napätia

Na obr. A3–3 je schéma mnohonásobného CL deliča napätia, ktorý pozostáva z veľkého počtu za sebou zapojených LC členov. Napätia na vstupoch jednotlivých členov sú označené  $U_n$ , kde  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Počet členov považujte za nekonečný.

- a) Určte impedanciu  $Z$  obvodu vzhľadom na vstupné svorky 1–0. Určte podmienku pre uhlovú frekvenciu  $\omega$ , pri splnení ktorej zdroj striedavého napätia pripojený k svorkám 1–0 dodáva do obvodu činný výkon, a podmienku, pri ktorej je výkon pripojeného zdroja iba jalový.
- b) Určte komplexný napäťový prenos LC článku  $A_U = U_{n+1}/U_n$ , jeho absolútnu hodnotu  $A_U$  a fázové posunutie  $\varphi$  pre charakteristické intervaly uhlovej frekvencie (podľa a)). Uveďte podmienku pre šírenie netlmenej napäťovej vlny pozdĺž reťazca.
- c) Určte výkon prenášaný netlmeným vlnením pri efektívnej hodnote  $U_1$  napätia zdroja.



Obr. A3–3

#### 4. Rádiometrické datovanie

Skúmanie vývoja Zeme a života na Zemi vyžaduje presné určenie veku najrôznejších nálezov minerálnych alebo fosílnych. Významné miesto medzi metódami datovania majú rádiometrické metódy, ktoré využívajú premeny jadier prvkov. Tieto premeny nie sú ovplyvnené chemickými väzbami, a preto nezávisia od chemickej minulosti skúmaných materiálov. Najviac využívané sú metódy využívajúce premeny  $^{14}_6\text{C} \rightarrow ^{14}_7\text{N}$  (polčas premeny  $\tau_{\text{C}} = 5\,730$  rokov),  $^{235}_{92}\text{U} \rightarrow ^{207}_{82}\text{Pb}$  (polčas premeny  $\tau_{\text{U1}} = 704$  mil. rokov),  $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{206}_{82}\text{Pb}$  (polčas premeny  $\tau_{\text{U2}} = 4,47$  mld. rokov) a  $^{40}_{19}\text{K} \rightarrow ^{40}_{18}\text{Ar}$  (polčas premeny  $\tau_{\text{K}} = 1,25$  mld. rokov). Voľba metódy závisí od predpokladaného veku vzorky, ktorý musí byť porovnateľný s polčasom premeny, a taktiež s možnosťou určiť množstvo materských a dcérskych atómových jadier. Na určovanie veku Zeme sa využíva U–Pb metóda. Na určovanie veku vzoriek rastlinného a živočíšneho pôvodu C–N metóda.

a) Predpokladajte, že pri premene rádioizotopov uránu prebehne séria  $\alpha$ - a  $\beta^-$ -premien.

Určte počet A  $\alpha$ -premien a počet B  $\beta^-$ -premien, ktoré prebehnú pri postupnej premene  $^{235}_{92}\text{U}$  a  $^{238}_{92}\text{U}$  na uvedené stabilné jadrá olova.

Jadro draslíka  $^{40}_{19}\text{K}$  sa mení s pravdepodobnosťou  $p_1 = 11,2\%$  na jadro  $^{40}_{18}\text{Ar}$  a s pravdepodobnosťou  $p_2 = 88,8\%$  na jadro  $^{40}_{20}\text{Ca}$  (vetvená alebo paralelná premena). Obidve premeny majú rovnaký polčas premeny  $\tau_{\text{K}}$ . V prírodnom draslíku sa nachádza hmotnostný pomer  $p_3 = 0,0117\%$  rádioizotopu  $^{40}\text{K}$  (zvyšok sú stabilné izotopy).

b) Určte o aké premeny ide v prípadoch  $^{40}_{19}\text{K} \rightarrow ^{40}_{18}\text{Ar}$  a  $^{40}_{19}\text{K} \rightarrow ^{40}_{20}\text{Ca}$ .

c) Vzorka obsahuje  $m_1 = 50$  mg čistého prírodného draslíka. Určte hmotnosti  $m_{\text{Ar}}$  a  $m_{\text{Ca}}$  dcérskych produktov Ar a Ca, ktoré vzniknú premenu  $^{40}\text{K}$  za čas  $t_1 = 100$  mil. rokov.

Metódou K–Ar sa určuje vek premenených hornín s obsahom K (žula, rula, sľuda, živce, bridlica) a vyvrelín (amfiboly – bazalt, andezit a pod.). Pri premenách alebo v láve je vysoká teplota, pri ktorej všetok plynný argón vyprchá. Po stuhnutí horniny zostáva vznikajúci argón v štruktúre uväznený. Po získaní vzorky sa materiál vo vákuu vyparí a hmotnostným spektroskopom sa určí zastúpenie jednotlivých atómov, resp. jadier atómov. Moderné spektroskopy sú schopné merať nanogramové množstvá zložiek. Keďže vápnik je značne zastúpený v horninách, premena K–Ca nie je na datovanie použiteľná. Argón však v hornine vzniká iba v dôsledku K–Ar premeny a preto je vhodnou mierou veku horniny od poslednej vysokoteplotnej premeny horniny.

d) Zo vzorky bazaltu z hĺbkovej sondy do vnútra vulkanického pohoria izolovali okrem iných prvkov argón  $^{40}\text{Ar}$  s hmotnosťou  $m_{\text{Ar}} = 2,5$  ng a izotop draslíka  $^{40}\text{K}$  s hmotnosťou  $m_{\text{K}} = 150$  ng. Určte dobu  $t_2$  od poslednej vysokoteplotnej premeny horniny.