58. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2016/2017

Kategória C – domáce kolo
Text úloh

Ajánljuk, hogy tanulmányozzák át a Čáp I., Konrád Ľ.: Fyzika v zaujímavých riešených úlohách gyűjteményben található hasonló feladatokat!

1. A Merkúr átvonulása a Nap korongja előtt

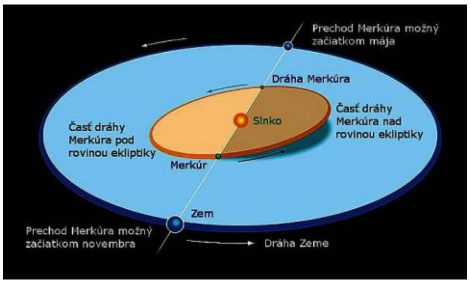
A Naprendszert a központi csillaga, a Nap és bolygói alkotják.

a) Állítsák össze a Naprendszer bolygóinak táblázatát, amelyben feltüntetik a Naprendszer nyolc bolygójának adatait! Minden sor egy bolygó adatait tartalmazza, amelyet fizikai táblázatokból, esetleg az internetről keressenek ki: a Nap körüli T_p keringési idő, a bolygó M_p tömege, R_p sugara, orbitális pályájának a_p fél nagytengelye! Határozzák meg a bolygó tömegéből és sugarából a ρ_p átlagos sűrűségét! Jelöljék meg a táblázatban azt a bolygót, amelynek legnagyobb a tömege, legnagyobb a sugara, legnagyobb, illetve legkisebb az átlagos sűrűsége!

b) Határozzák meg a bolygók szögátmérőjét (φ), amilyennek a Földről figyelhetők meg, amikor a legjobban megközelítik egymást a Földdel. Tételezzék fel, hogy a bolygók a_p sugarú körpályán, egy síkban, az *ekliptikában* keringenek a Nap körül!
Jelöljék meg a három látszólagosan legnagyobb bolygót!

c) Vezessék le a bolygó T keringési idejét az orbitális pályán, mint az a fél nagytengely függvényét! Írják a táblázat új oszlopába a táblázat adataiból a képlet felhasználásával kiszámított $T_\mathrm{p\,vyp}$ értékeket – ezeket hasonlítsák össze a táblázat T_p értékeivel! Szerkesszék meg a T keringési idő grafikonját az a fél nagytengely függvényében! Jelöljék be a grafikonon, kis körökkel, a táblázat T_p értékeit! Készítsenek egy második grafikont is, amelyben a grafikon tengelyeire a mennyiségek logaritmusát vigyék fel ($\log T \sim \log a$)! Hasonlítsák össze a két grafikont, és indokolják meg, mi a logaritmikus grafikon előnye!

d) 2016 májusában megfigyelhető volt, kis sötét pont formájában, a Merkúr átvonulása a Nap korongja előtt. A Merkúr pályájának síkja $\varphi = 7{,}0°$-os szöget zár a Föld pályájának síkjával, az ekliptikával (lásd a C–1 ábrát). Bizonyítsák be, hogy a Merkúr elkövetkező átvonulásait 2019, 2023 és 2039 novemberében, valamint 2049 májusában lehet majd megfigyelni! Magyarázzák meg, hogy miben tér el a novemberi bolygóátvonulás a májusitól!

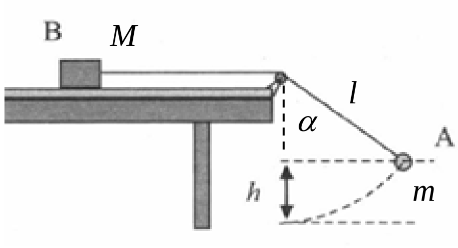


C–1 ábra

Megjegyzés: Ismerkedjenek meg a logaritmus ($\log x$*) függvénnyel, valamint grafikus ábrázolásával! A függvény értékeit számológéppel számítsák ki!*

2. Mechanikus rendszer

A C–2 ábrán egy mechanikai rendszer látható. A rendszert egy szilárd, kisméretű csigán át vezetett vékony fonállal összekötött m tömegű golyó és M tömegű hasáb alkotja. A hasáb a vízszintes asztallapon fekszik – az asztallap felülete és a hasáb anyaga közti súrlódási együttható f. A hasábot és a golyót összekötő fonál hossza l.



C–2 ábra

a) Határozzák meg a golyó m_1 tömegének határértékét, amelynél a rendszer még nyugalomban marad! Készítsenek ábrát, amelyben bejelölik a hasábra, csigára és-golyóra ható erőket!

b) Határozzák meg a hasáb a gyorsulását, ha a függőleges fonálra $m_2 > m_1$ tömegű golyót függesztünk! Készítsenek vázlatot, és jelöljék be rajta a rendszerre ható erőket! Definiálják az egyes erőket!

Egy $m < m_1$ tömegű golyót függesztünk a fonálra. A fonalat feszesen tartva, a golyót h magasságba térítjük ki a függőleges síkban (C–2 ábra), majd elengedjük.

c) Határozzák meg a golyó tömegének m_3 határértékét, hogy $m < m_3$ tömegnél a hasáb nyugalomban marad még akkor is, amikor a golyó eléri legalacsonyabb pontját!

d) A fonálra egy $m_4 > m_3$ tömegű golyót függesztünk. A fonalat feszesen tartva, a golyót h magasságba térítjük ki a függőleges síkban, majd elengedjük. Határozzák meg a függőleges irány és a fonál által bezárt α_1 szöget abban a pillanatban, amikor a hasáb (a fonál húzóerejének hatására) megmozdul az asztalon!

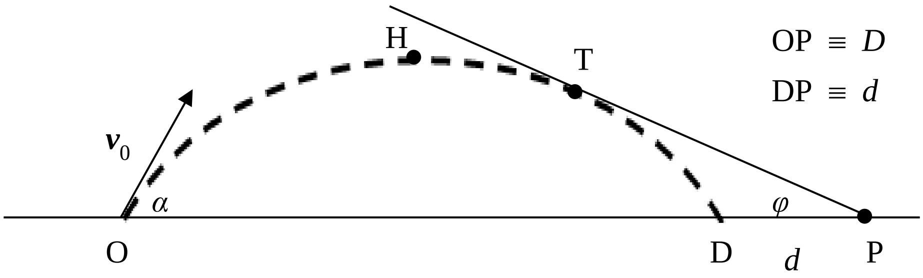
A feladatot oldják meg általánosan, majd a következő értékekre: $M = 150$ g, $l = 50$ cm, $f = 0{,}16$, $h = 25$ cm, $m_4 = 15$ g, $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$!

Tételezzék fel, hogy a csiga tengelyében fellépő súrlódás elhanyagolhatóan kicsi! A fonál tökéletesen hajlik, nem nyújtható és a tömege elhanyagolhatóan kicsi.

Megjegyzés: próbálják ki a kísérletet!

3. Labdadobálás

A tanító a tanulókkal a játszótérre ment – krikett labdával szemléltetni a ferdehajítást. Meghatároztak egy O pontot, amelyből a tanulók dobálták a labdát, valamint egy P pontot $D = \text{OP}$ távolságban a labda pályasíkjában, amelyből a labda röptét figyelték meg (C–3 ábra).



C–3 ábra

Az osztály legjobbjának sikerült a labdát eldobnia a D pontba, amely d távolságban volt a megfigyelőktől ($d = \text{DP}$). A dobásnál stopperórával mérték a labda röptének t_D idejét.

A mért értékekből kiszámítottak több adatot, amelyet nem tudtak közvetlenül mérni.

a) Írják le az egyenleteket, amelyek megadják a labda pillanatnyi $\boldsymbol{v}$ sebességének függőleges és vízszintes összetevőjét, valamint a labda pillanatnyi $\boldsymbol{r}$ helyzetvektorát az O ponthoz viszonyítva!

b) Vezessék le, D, d és t_D mennyiségek felhasználásával, a labda kezdeti sebességének v_0 nagyságát, és a hajítás α szögét!

c) Vezessék le a labda által a pályáján elért legnagyobb h magasságát!

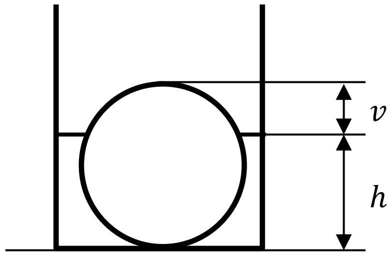
d) Határozzák meg a labda legnagyobb φ elevációs szögét (a játszótér vízszintes síkjához viszonyítva), amely alatt a megfigyelők látták a labdát!

e) Szerkesszék meg a repülő labda y magasságának grafikonját az O ponttól mért vízszintes x távolság függvényében a következő értékekre: $D = 80{,}0\ \text{m}, d = 20{,}0\ \text{m}, t_\text{D} = 2{,}66\ \text{s}$! A grafikonba jelöljék be a P pontot is, valamint az egyenest, amely a maximális φ elevációs szögnek felel meg! A grafikonból megállapított h és φ értékeket hasonlítsák össze a b) és c) részfeladatokban levezetett képletek segítségével számított értékekkel!

Tételezzék fel, hogy a légellenállás elhanyagolhatóan kicsi, valamint, hogy az O, D és P pontok a játszótér vízszintes felületének síkjában találhatók! A számításoknál tételezzék fel, hogy a nehézségi gyorsulás $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$!

4. Úszó golyó

Egy magas és $R = 50$ mm belső sugarú henger alakú edény aljára egy $r = 45$ mm sugarú homogén ρ_G sűrűségű golyót helyezünk. Az edénybe vizet öntünk, a víz sűrűsége ρ_V és $\rho_G/\rho_V = 0{,}90$. Amikor a víz edény aljától számított h vízszintmagassága az edényben eléri a h_1 értéket, a golyó nullanagyságú erővel hat az edény aljára. Ekkor a víz felszíne feletti gömbszelet magassága $v_1 = 2r - h_1$ (lásd a C–4 ábrát).



C–4 ábra

a) Készítsenek vázlatos rajzot a következő három esetre: $h < h_1$, $h = h_1$ és $h > h_1$, mindegyik ábrán jelöljék be a golyóra ható erőket!
Mivel h_1 értékének analitikus meghatározása az egyenletekből bonyolult feladat, határozzák meg grafikus vagy numerikus módszerrel – ez könnyen megoldható. Használjanak megfelelő számítógépes programot, igaz, ebben az esetben azonban csak számszerűen megadott értékekkel lehet dolgozni.
Megjegyzés: Egy r sugarú gömb v magasságú gömbszeletjének térfogata

$$V_{od} = V_G \frac{1}{4}\left(\frac{v}{r}\right)^2 \left(3 - \frac{v}{r}\right), \quad ahol \quad V_G = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad a\ gömb\ térfogata.$$

b) Szerkesszék meg az $y = V_{od}/V_G$ arányt az $x = v/r$ változó függvényeként!

c) Mennyi vizet (V_V térfogat) kell az edénybe önteni, hogy víz szintje elérje a h_1 értéket –határozzák meg a b) részben megszerkesztett függvény segítségével!

Az edénybe annyi vizet öntünk, hogy a c) pontban meghatározott mennyiség kétszerese legyen az edényben – ekkor a golyó úszni fog a vízben. Vékony csövön keresztül olajt öntünk a víz felszínére, az olaj sűrűsége $\rho_O/\rho_G = 0{,}95$. Annyi olajt öntünk, hogy épp ellepje a gömb tetejét.

d) Határozzák meg az olaj V_O térfogatát, amelynél a gömb teteje érinti az olaj felszínét! Határozzák meg a víz szintjének (az edény aljától számított) h_2 magasságát ebben az esetben! Készítsenek vázlatot, és ábrázolják a golyóra ható összes erőt!

Tételezzék fel, hogy az olaj nem keveredik a vízzel és homogén réteget képez a vízen!

5. A Hale-Bopp üstökös

1997-ben figyelték meg az évszázad valószínűleg legfényesebb üstökösét, a Hale-Bopp üstököst. Csillagászati megfigyelések alapján az üstökös Naptól mért legkisebb távolsága $r_1 = 0{,}914$ AU volt (csillagászati egység, $1\ \mathrm{AU} = 1{,}496\times10^{11}$ km), és ezen a Naphoz legközelebbi ponton $v_1 = 44{,}01\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$ sebességgel haladt keresztül. Az üstökös pályasíkja merőleges az ekliptikára, és a pálya főtengelye $\varphi = 51{,}0°$ -os szöget zár az ekliptikával. A Nap közelében az üstökösnek kettős csóvája volt.

C–5 ábra

a) Magyarázzák meg, miért volt két megfigyelhető csóvája az üstökösnek (lásd a C–5 ábrát), és milyen irányba mutattak a Naphoz viszonyítva! Használják fel az interneten található információkat!

b) Bizonyítsák be, hogy egy periodikus üstökösről van szó! Határozzák meg, hogy melyik évben várható újra az üstökös, és mekkora a pályáján a Naptól számított r_2 legnagyobb távolsága!

c) Vázolják fel közelítőleg az üstökös pályájának Naphoz közeli szakaszát, a pálya és az ekliptika metszéspontjai (A, B) között! Határozzák meg közelítőleg a metszéspontok Naptól mért $s_1 = \overline{AS}$ és $s_2 = \overline{BS}$ távolságát! Ha a Naprendszer bolygóinak pályáihoz viszonyítjuk az A és B pontokat, mely bolygók pályája közelében találhatók? Veszélyes volt az üstökös Földközelsége?

A szükséges mennyiségek értékét keressék ki táblázatokban vagy az interneten! Az univerzális gravitációs állandó $G = 6{,}674\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$, a Nap tömege $M = 1{,}989\times10^{30}$ kg.

A pálya grafikonjának megszerkesztéséhez táblázatkezelő program (pl. EXCEL) ajánlott. Az ellipszisek tulajdonságaival az irodalomból ismerkedhetnek meg. A kiszámított a fél nagytengely és b fél kistengely értékeit felhasználva, az ellipszis grafikonját az $y = \pm b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ képlet segítségével szerkesszék meg! Itt x, y az ellipszis koordinátái abban a derékszögű koordinátarendszerben, ahol az ellipszis középpontja a koordinátarendszer origója, az x, y tengelyek pedig az ellipszis fél nagytengelyével és fél kistengelyével esnek egybe.

6. Az asztanai piramis

A modern, acélból és üvegből épített épületek egyik fő gondja a hőmérséklet változásakor keletkező deformációk és mechanikai feszültségek. A modern ambiciózus építmények egyike Kazahsztán fővárosában, Asztanában, az üvegből és acélból megépített *Palace of Peace and Reconcilliation – a Béke és megbékélés palotája.*

C–ábra

A piramis magassága 0 °C-on $h = 62$ m, a négyzet alakú alapzat oldalhossza $a = 62$ m. Az építmény $d = 15$ m vastagságú betonlapon nyugszik. Alapváza egy acélkonstrukció, és a háromszög alakú egyforma üveglapokat tartja (lásd a C–6 ábrát). Az évi hőmérséklet Asztanában 40 °C és –40 °C között váltakozik.

a) Hogy az üveglapok ne repedezzenek meg a hőmérsékletváltozások hatására, az üveglapok méretét úgy választották meg, hogy egyezzék az acélkeret méretével $t_1 =- 40$ °C-on. A hőmérséklet emelkedésével rés keletkezik az acélkeret és az üveglemez között. Határozzák meg az acélkeret és az üveglap felső széle közt keletkező rés c_1 nagyságát $t_2 = 40$ °C hőmérsékleten! Az üveglap alsó vége mindvégig az acélkeretre támaszkodik.

b) Határozzák meg a piramis magasságának Δh változását a feltüntetett t_1 és t_2 szélsőséges hőmérsékletváltozásnál!

A piramis az említett vízszintes betonlapon áll. Hogy az acélszerkezetben ne keletkezzen nem kívánt mechanikai feszültség, a piramis alapja csak az egyik sarkában van a betonlaphoz rögzítve, az alap többi része szabadon képes elmozdulni a betonlapon.

c) Határozzák meg, milyen c_2 nagyságú tartományban mozdul el a piramis alapjának rögzített sarkával átellenes sarka a betonlaphoz viszonyítva, ha a hőmérséklet a t_1 és t_2 tartományban változik!

Ha a piramis egész alapja teljes egészében a betonlaphoz lenne rögzítve, hőmérsékletváltozáskor nem kívánt mechanikai feszültség keletkezne. Ezt egy egyszerű modellel szemléltethetjük. Képzeljenek el egy vízszintes a hosszúságú homogén acélhengert, amelynek keresztmetszete $S_0 = 0{,}10\ \mathrm{m}^2$, és a két vége $t_0 = 0$ °C hőmérsékleten lett beágyazva a betonlapba!

d) Határozzák meg az $\boldsymbol{F}$ erőt, amellyel az acélrúd és a beton lap hatnak egymásra a beágyazási pontokban, vízszintes irányban, t_1 és t_2 hőmérsékleteknél! Határozzák meg a σ összenyomási feszültséget az acélrúd és betonlap S_0 érintkezési felületén! Az eredményt hasonlítsák össze a beton és az acél összenyomási (kompressziós) szilárdságával! Tételezzék fel, hogy a betonlap méretei és így az acélrúd méretei a mechanikai feszültség hatására elhanyagolhatóan kicsik!

Tételezzék fel, hogy az acélszerkezet és a betonlap hőmérséklete minden vizsgált esetben egyenlő!

Az acél lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha_1 = 13\times10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$, az üvegé $\alpha_2 = 9{,}0\times10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$ és a betoné $\alpha_3 = 10\times10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$, az acél rugalmassági modulusa $E = 200$ GPa, az acél kompressziós szilárdsága $\sigma_0 = (400 \div 1\,000)$ MPa és a beton kompressziós szilárdsága $\sigma_\mathrm{b} = (20 \div 50)$ MPa.

Megjegyzés: A palota kulturális, társadalmi és tanácskozási központként működik (1500 férőhelyes operával, nemzeti kulturális múzeummal, könyvtárral, kutatóközponttal, új „egyetemes civilizáció”).

Az inga hangolása– kísérleti feladat

A C–4 ábrán látható órában ingát használnak, amely egy lapos rúdból áll. A rúd a felső végén van felfüggesztve, az alsó végén pedig egy nehezék, egy eltolható diszk található. A diszket a rúdon eltolva változik az inga lengésideje – így lehet beállítani az órát.

Vizsgálják meg a kísérletben, hogyan befolyásolja a nehezék helyzete az inga lengésidejét!

1. feladat – az inga terve és összeállítása

Az inga egy L hosszúságú és M tömegű homogén rúdból, valamint egy m tömegű nehezékből áll, amely tömegközéppontja l távolságban van az inga forgástengelyétől. Az inga lengésideje

C–4 ábra

$$T = T_0\sqrt{\frac{ML^2 + 3ml^2}{L(ML + 2ml)}} \quad \text{ahol} \quad T_0 = \sqrt{\frac{2L}{3g}}. \qquad (1)$$

Itt T_0 a nehezék nélküli inga lengésideje.

Vezessék le a megadott egyenleteket!

Vágjanak egy $L = 60 - 70$ cm hosszúságú rudat, majd az egyik végén alakítsák ki a rúd lapos oldalára merőleges forgástengelyt! Mérjék meg a rúd L hosszát és M tömegét! A lengésidő szabályozásához válasszanak egy megfelelő $m \sim (1/10)M$ tömegű kis nehezéket! Határozzák meg a nehezék m tömegét!

Számítsák ki T_0 értékét az (1) képletből! Mérjék meg a nehezék nélküli rúd T_0 lengésidejét, és a két értéket hasonlítsák össze! Magyarázzák meg az esetleges eltérést!

Szerkesszék meg az adott M, m, L és T_0 értékekre az inga T lengésidejének grafikonját az l/L arány függvényében a $0 < (l/L) < 1$ tartományban!

2. feladat – az inga „hangolása”

Erősítsék fel a rúdra a nehezéket gumi vagy ragasztószalag segítségével. Fokozatosan tolják el a nehezéket a rúdon! A nehezék minden helyzeténél mérjék meg a nehezék tömegközéppontjának l távolságát a forgástengelytől, és a lehető legpontosabban mérjék meg az inga T lengésidejét! A mérést a nehezék 10 különböző helyzetére végezzék el! A mért értékeket jegyezzék le táblázatba, és a mérési eredményt jelöljék be a T lengésidő l/L aránytól függő elméleti grafikonjába is!

Hasonlítsák össze az elméleti görbét a kísérletben mért értékeken áthaladó görbével, és az esetleges eltéréseket magyarázzák meg!

3. feladat – a mérési eredmények pontosságának megítélése

Határozzák meg minden mérési eredmény pontosságát, és fejezzék ki megbízhatósági tartomány formájában, pl. $m = 20{,}0 \pm 0{,}5$ g! Végezzenek becslést a T_0 érték számításból kapott pontosságára, és a mérésből kapott pontosságára!