

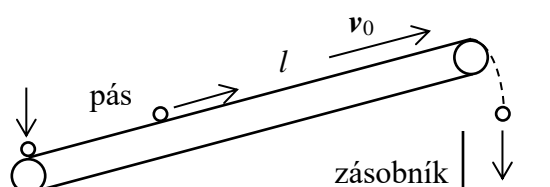
**58. ročník Fyzikálnej olympiády**  
**v školskom roku 2016/2017**  
**Kategória A – domáce kolo**  
*texty úloh<sup>1</sup>*

**1. Gul'ôčka na bežiacom páse**

Gumový pás dopravníku s dĺžkou  $l$  a uhlom sklonu  $\alpha$  vzhľadom na vodorovnú rovinu sa pohybuje smerom nahor rýchlosťou  $v_0$ , obr. A–1. Budeme riešiť pohyb homogénnej gul'ôčky, ktorú položíme na dolný okraj pásu. Gul'ôčka má nulovú začiatočnú rýchlosť  $v$  a nulovú uhlovú rýchlosť  $\omega$ . Faktor trenia medzi gul'ôčkou a pásom je  $f$ .

- Nakreslite obrázok gul'ôčky na páse, ak predpokladáte, že pás gul'ôčku unáša, a vyznačte v ňom všetky sily, ktoré na gul'ôčku na páse pôsobia.
- Určte podmienku, pri ktorej by sa gul'ôčka položená na stojaci pás pohybovala nadol valivým pohybom (bez prešmykovania). Určte zrýchlenie  $a$  hmotného stredy gul'ôčky pri tomto valivom pohybe.
- Určte podmienku, ktorá musí byť splnená, aby gul'ôčka položená na pás sa začala pohybovať po bežiacom páse smerom nahor.
- Odvoďte vzťah pre vzdialenosť  $d$  od dolného konca pásu, do ktorej sa gul'ôčka na páse dostane.
- Zostrojte graf dráhy  $d$  ako funkcie uhlu  $\alpha$  pre hodnoty  $v_0 = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $f = 0,25$  a  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Z grafu určte uhol sklonu  $\alpha$ , pri ktorom gul'ôčka dosiahne horný koniec pásu s dĺžkou  $l = 80 \text{ cm}$  a spadne do zásobníka.

Pozn.: Moment zotrvačnosti gule vzhľadom na os prechádzajúcu jej stredom  $I = (2/5) m R^2$ , kde  $m$  je hmotnosť gule a  $R$  jej polomer.



Obr. A–1

---

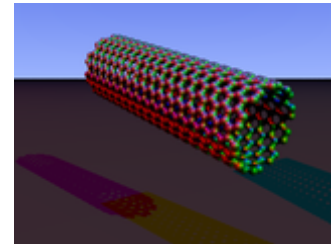
<sup>1</sup> Odporúčame preštudovať si podobné úlohy v publikácii Čáp I., Konrád L.: Fyzika v zaujímavých riešených úlohách Tradičné sústredenie v Terchovej sa v tomto roku nekoná

## 2. Nanováhy

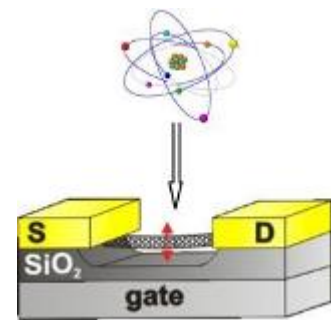
V roku 2012 zverejnili správu<sup>2</sup>, že *Adrian Bachtold* so svojou výskumnou skupinou na Katalánskej univerzite v Barcelone pomocou uhlíkových nanotrubic uskutočnili meranie hmotnosti atómu xenónu s hmotnosťou 218 yoktogramov s presnosťou jednotky yoktogramu (predpona yokto vyjadruje  $10^{-24}$ ). Vzniká tak možnosť zmerať hmotnosť jedného protónu.

Uhlíková nanotrubička je tenké duté vlákno (obr. A–2 (a)) s vonkajším priemerom  $d$  niekoľko nanometrov (nm), s nízkou priemernou hustotou  $\rho$  a vysokým modulom pružnosti v ťahu  $E$ . Dĺžka nanotrubic býva až milión-násobok jej priemeru. Uhlíkové nanotrubičky sa vyznačujú vysokou elektrickou vodivosťou v pozdĺžnom smere.

Pri konštrukcii váh umiestnili nanotrubičku medzi dva mikrodržiaky S a D (obr. A–2 (b)). Nanotrubička sa použila ako miniatúrna pružina, ktorá môže kmitať v smere kolmom na pozdĺžnu os nanotrubičky. Vzniká tak mikroskopický oscilátor s frekvenciou  $f_0$  vlastných priečných kmitov. Ak sa na nanotrubičku zachytí meraný atóm, zmení sa frekvencia kmitov tohto oscilátora. Zo zmeny frekvencie možno určiť hmotnosť zachyteného atómu.



(a)

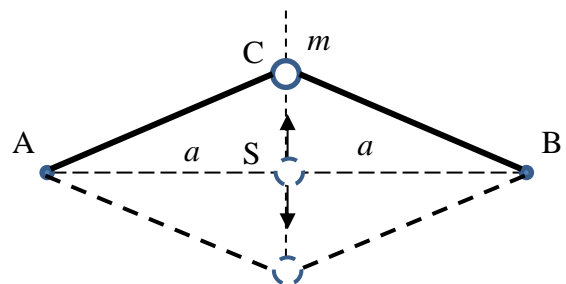


(b)

Obr. A–2

a) Uvažujme zjednodušený model kmitavej sústavy podľa obr. A–3.

Teliesko s hmotnosťou  $m$  je upevnené dvomi pružnými vláknami s dĺžkou  $a$  a dĺžkovou hmotnosťou  $\mu$  medzi bodmi A a B, obr. A–3. Sila napínajúca vlákno v pokojovej polohe je daná začiatočným relatívnym predĺžením  $\varepsilon$  vzhľadom na ich nezaťaženej dĺžku  $a_0$ . Po vychýlení telieska v zvislom smere z rovnovážnej polohy S a uvoľnení začne sústava kmitať okolo rovnovážnej polohy. Predpokladajte, že úseky AC a CB vlákna zostávajú priame pri pohybe telieska, a ich modul pružnosti v ťahu je  $E$ . Uvažujte veľmi malé výchylky telieska z rovnovážnej polohy. Určte frekvenciu  $f$  kmitov sústavy.



Obr. A–3

b) Pomocou modelu v časti a) určte frekvenciu  $f_0$  kmitov nezaťaženej nanotrubičky ( $m = 0$ ) so začiatočným relatívnym predĺžením  $\varepsilon = 0,10$  a frekvenciu  $f$  kmitov so zachyteným atómom xenónu v jej strede pre dĺžku nanovlákn  $l = 2a = 1,0 \mu\text{m}$ , priemer  $d = 1,0 \text{ nm}$ , dĺžkovú hmotnosť  $\mu = 1,0 \times 10^{-15} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$  a modul pružnosti v ťahu  $E = 900 \text{ GPa}$ . Posúďte, či sa prítomnosť atómu xenónu na nanotrubičke prejaví merateľnou zmenou frekvencie.

<sup>2</sup> <https://www.icfo.eu/research/projects?project=202>

Pozn. 1: Meranie relatívnej zmeny frekvencie 1 ppm je možné bežnými prostriedkami, (ppm – parts per million, je jedna milióntina).

Pozn. 2: Vlákno má hmotnosť porovnateľnú s hmotnosťou telieska a preto je potrebné uvažovať vplyv jeho hmotnosti na kmity sústavy.

Pozn. 3: Ďalšie potrebné informácie vyhľadajte na internete.

### 3. JETLEV – Flyer

V roku 2008 sa objavil na trhu nový vynález Raymonda Li, ktorý umožňuje levitáciu vďaka vodnému dýzovému pohonu – JETLEV, obr. A–4. Pracuje na rovnakom princípe ako vodný skúter. Obidva prostriedky zábavy a športu možno vidieť v rekreačných strediskách nielen pri mori, ale aj na väčších jazerách na Slovensku.



Obr. A–4

Hrubou hadicou s vnútorným priemerom  $D = 15$  cm sa privádza voda z výkonného čerpadla do zariadenia s dvomi dýzami s vnútorným priemerom  $d = 50$  mm, v ktorom je človek zavesený. Čerpadlo s výkonom  $P = 150$  kW, ktoré je súčasťou vodného skútra plávajúceho na hladine vody, nasáva vodu otvorom v dne skútra, ktoré je prakticky na úrovni hladiny, a vháňa ju do hadice napájajúcej JETLEV.

a) Vysvetlite fyzikálny princíp vzniku levitačnej (nadržujúcej) sily. Nakreslite obrázok a vyznačte v ňom veličiny potrebné k vysvetleniu.

Najprv uvažujme požiarnu striekačku upevnenú na hasičskom vozidle T815 s cisternou.

b) Určte výkon  $P$  čerpadla, ak je objemový prietok vody  $Q_V = 3\,200$  l/min, priemer vstupnej hadice čerpadla a priemer výstupnej hadice  $d_1 = 15$  cm a priemer dýzy striekačky  $d_2 = 50$  mm. Určte veľkosť reakčnej sily  $F$ , ktorá na striekačku pôsobí, ak voda tryská zo striekačky vo vodorovnom smere.

Teraz uvažujme vodný skúter ako čerpadlo, ktoré nasáva vodu pod plavidlom a pomocou dýzy tryská dozadu vo vodorovnom smere.

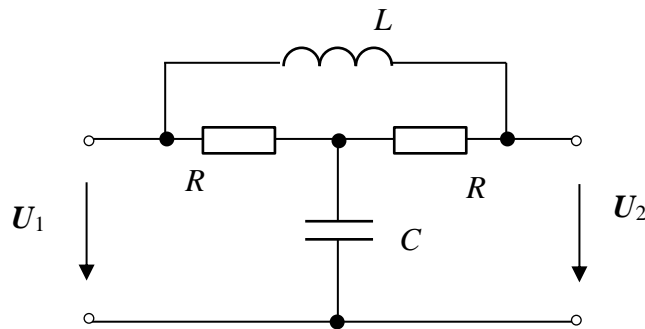
c) Po pripojení na čerpadlo vo vodnom skútri je JETLEV-flyer schopný vystúpiť až do výšky  $h = 10$  m. Určte potrebný výkon čerpadla, ak je priemer prírodného potrubia  $d_1 = 15$  cm, priemer ústia oboch dýz  $d_2 = 5,0$  cm, dĺžková hmotnosť prírodnej rúry  $\mu = 4,0$  kg/m a hmotnosť človeka so zariadením  $m = 100$  kg. Hustota vody  $\rho = 1,00 \times 10^3$  kg·m<sup>-3</sup>.

Straty v potrubíach a v čerpadle považujte za veľmi malé.

#### 4. Elektrický filter

Na úpravu elektrických signálov sa používajú okrem iných obvodov aj rôzne filtre, ktorými možno odstrániť zložky signálu s nežiaducimi frekvenciami. Schéma filtra typu „dolnofrekvenčná priepust“ je na obr. A-5.

Na vstup filtra je pripojený zdroj harmonického striedavého napätia s frekvenciou  $f$  a amplitúdou  $U_1$ . Na výstup je pripojený merací prístroj s veľmi vysokým vnútorným odporom.



Obr. A-5

- Odvoďte vzťahy pre komplexný napät'ový prenos filtra  $A = U_2/U_1$ , amplitúdovú prenosovú charakteristiku  $A = U_2/U_1$  a fázovú prenosovú charakteristiku filtra  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  ako funkcie frekvencie  $f$  zdroja.
- S použitím vhodného počítačového programu zostrojte grafy amplitúdovej a fázovej prenosovej charakteristiky, ako funkcie frekvencie zdroja, pre hodnoty indukčnosti  $L = 10 \mu\text{H}$ , kapacity  $C = 1,0 \mu\text{F}$ , odporu  $R = 10 \text{k}\Omega$ . Aby sa získal prehľad o činnosti filtra pri nízkych i vysokých frekvenciách, volí sa na osi frekvencie logaritmická stupnica. Grafy zostrojte pre rozsah frekvencie od  $10^3$  do  $10^{10}$  Hz, tzn.  $\log f$  od 3 do 10.
- Zaujímavou vlastnosťou filtra je, že v rozsahu jeho priepustnosti ( $A \approx 1$ ) výstupné napätie sleduje fázu vstupného napätia ( $\varphi \approx 0^\circ$ ) a v druhej časti výstupné napätie je v protifáze so vstupným napätím ( $\varphi \approx 180^\circ$ ), čo možno využiť v tzv. aktívnych filtroch. Určte medznú frekvenciu  $f_{m1}$  pásma priepustnosti filtra (na úrovni poklesu  $A$  na hodnotu 0,707 a medznú frekvenciu  $f_{m2}$  prechodu z jednej časti rozsahu priepustnosti do druhej (pre  $\varphi \approx 90^\circ$ ).

## 5. *Umelé slnko*

Jednou zo základných podmienok života na Zemi je slnečné žiarenie. Slnečná sústava obieha okolo centra Galaxie, pričom na svojej ceste Vesmírom môže stretnúť rozličné objekty. Jeden z katastrofických scenárov predpokladá stretnutie Slnečnej sústavy s malým prachovým mračnom, ktoré sa zachytí gravitáciou Slnka a vytvorí v rovine ekliptiky medzi Venušou a Merkúrom pás, ktorý z pohľadu Zeme zatieni Slnko. Fantazijným riešením tohto problému je vytvorenie umelého Slnka, nazvime ho Helios, ktoré by obiehalo okolo Zeme.

- a) Uvážte, či by mohlo takéto umelé slnko splniť základné funkcie Slnka:
- zachovanie dĺžky dňa a noci na Zemi
  - zachovanie ročného cyklu na príslušných zemepisných šírkach
  - udržanie teploty a životných podmienok pre flóru, ktoré je základom potravinového reťazca
  - vytváranie rovnakých slapových síl ako Slnko

Možnosť splnenia jednotlivých požiadaviek stručne vysvetlite.

- b) Aby bolo možné splniť požiadavky a), musel by mať Helios určité parametre.

Určte:

- povrchovú teplotu  $T_H$  Heliosu
- polomer  $r_H$  kružnicovej orbity a jej rovinu vzhľadom na ekliptiku
- polomer  $R_H$  Heliosu
- hmotnosť Heliosu a jeho strednú hustotu  $\rho_H$

- c) Uveďte, či by bolo možné odlíšiť Helios od Slnka jednoduchým pozorovaním. Odpoveď fyzikálne vysvetlite.

- d) Uvážte, či by mohlo teleso s parametrami podľa b) existovať ako zdroj žiarenia pre Zem. Odpoveď fyzikálne vysvetlite.

Potrebné hodnoty veličín a konštánt vyhľadajte v tabuľkách.

Pri riešení úlohy vplyv okolitých telies na sústavu Zem–Helios neuvažujte.

## 6. Americium $^{241}\text{Am}$

Na napájanie elektrických zariadení (nezávislých od pripojenia k energetickej sieti) sa používajú rôzne zdroje konštantného napätia. Pre niektoré aplikácie sú potrebné zdroje, ktoré dodávajú energiu až desiatky rokov. Ide najmä o zariadenia nedostupné z hľadiska trvalého umiestnenia v extrémnych podmienkach (hlbkové sondy v oceánoch alebo zemskej kôre, majáky, meteorologické sondy, kardiostimulátory) alebo v nedostupnej vzdialenosti (kozmicke sondy).

Jedným z takýchto *LongLife* zdrojov sú zdroje využívajúce energiu uvoľnenú pri jadrových premenách nestabilných rádioizotopov. Z ekonomického hľadiska je výhodný lacnejší rádioizotop  $^{241}\text{Am}$ , ktorý je odpadovým produktom jadrových reaktorov. Hlavná jadrová  $\alpha$ -premena má polčas 432,2 roka a pri nej dochádza k vzniku nízko energetického  $\gamma$  fotónu s vlnovou dĺžkou 20,8 pm.

- Napište rovnicu  $\alpha$ -premeny rádioizotopu  $^{241}\text{Am}$ . Zistite, podľa ktorého zo štyroch rádioaktívnych rozpadových radov sa mení jadro izotopu  $^{241}\text{Am}$  postupne na stabilné jadro. Uveďte názvy prvkov, ktoré vznikajú počas tohto radu premien, polčasy jednotlivých premien a uveďte výsledný stabilný izotop radu.
- Nestabilné produkty radu premien izotopu  $^{241}\text{Am}$  existujú iba ako umelo vyrobené. Vysvetlite, prečo sa v prírode tieto produkty nenachádzajú, zatiaľ čo produkty iných radov premien v prírode existujú.

Rádioaktívne látky sa používajú mimo iného ako zdroje energie. Väčšinou ide o zdroje tepla, ktoré sa využíva buď priamo, alebo sa transformuje na elektrickú energiu.

- Určte energiu  $\Delta E$  uvoľnenú pri  $\alpha$ -premene jadra  $^{241}\text{Am}$ . Určte, ako sa uvoľnená energia rozdelí medzi produkty reakcie. Výsledky vyjadrite v jednotkách eV a v %.
- Akú hmotnosť čistého  $^{241}\text{Am}$  musí mať náplň generátora, aby jeho tepelný výkon bol  $P = 5,0$  kW.
- Počas prevádzky generátora klesá jeho tepelný výkon a rastie jeho  $\beta$ -žiarenie. Určte aktivitu  $A_\alpha$  produkcie  $\alpha$  častíc a  $A_\beta$  produkcie  $\beta$  častíc náplne generátora po  $\tau = 20$  rokoch prevádzky.

Potrebné konštanty a hodnoty veličín vyhľadajte v dostupných zdrojoch informácií.

Hmotnosti izotopov  $m_{\text{Am}241} = 241,056829$  u,  $m_{\text{Np}237} = 237,0481678$  u,  $m_\alpha = 4,001506$  u.

Pozn.: Pri úprave možno pre  $x \ll 1$  využiť približný vzťah  $e^x \approx 1 + x$ .

## 7. Vyšetrovanie interferencie vlnenia – experimentálna úloha

### Úloha:

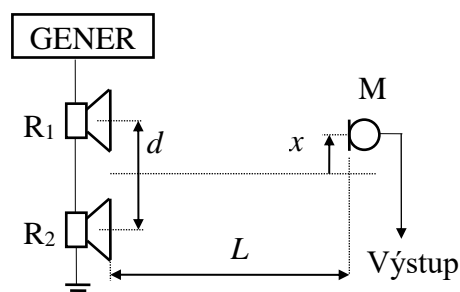
S využitím interferencie zvukového vlnenia generovaného dvomi reproduktormi vyšetríte vznik interferenčných maxím a miním akustického signálu. Zostrojíte graf závislosti signálu mikrofónu od posunutia  $x$ , obr. A–6, určte hodnoty posunutia pre maximá a miním signálu a určte rýchlosť  $c$  zvuku vo vzduchu pri podmienkach (teplota, tlak, vlhkosť) v laboratórnej miestnosti. Mearnie opakujte pre tri rôzne frekvencie zvuku (napr. 100 Hz, 1 kHz a 10 kHz).

### Pomôcky:

Dva malé reproduktory (napr. od počítača), zdroj striedavého napätia s frekvenčným rozsahom 20 Hz ÷ 20 kHz (napr. signál generovaný priamo na počítači<sup>3</sup>), akustický detektor (možno využiť aplikáciu Decibel Meter v smartfóne, alebo mikrofón so zosilňovačom).

### Postup merania :

1. Dva rovnaké jednoduché reproduktory umiestnite vedľa seba do vzdialenosti približne  $d = 50$  cm, tak aby vyžarovali rovnakým smerom. Reproduktory pripojte k spoločnému zdroju striedavého napätia, obr. A–6.
2. Do vhodnej vzdialenosti  $L \sim 5d$  umiestnite detektor, ktorý možno presúvať v rovine sústavy kolmo na smer osí reproduktorov. Zmeraný signál  $s$  detektora zapisujte spolu so súradnicou  $x$  detektora do tabuľky.
3. Zostrojíte graf úrovne signálu  $s$  ako funkcie posunutia  $x$ . Z grafu určte súradnice  $x_{\min}$ , pre ktoré je signál minimálny, a  $x_{\max}$ , pre ktorý je maximálny. Určte najmenej dve minímá a dve maximá signálu.
4. Odvodte teoretický vzťah pre súradnice maxím a miním intenzity zvuku v daných podmienkach a s použitím experimentálnych výsledkov určte rýchlosť  $c$  zvuku vo vzduchu v miestnosti.
5. Odhadnite presnosť merania.



Obr. A–6

### Poznámky:

- ak je minimum intenzity na osi sústavy  $x = 0$ , treba prepólovať jeden z reproduktorov
- uvážte prípadný vplyv odrazov zvuku od predmetov v miestnosti a od stien
- meranie opakujete pre rôzne frekvencie generovaného zvuku
- o existencii interferenčného javu sa presvedčte aj sluchom
- vyskúšajte rôzne usporiadania sústavy a nájdite najvhodnejšie pre dané meranie.

<sup>3</sup> Možno využiť aplikáciu z internetu [https://www.zeitnitz.eu/scope\\_en](https://www.zeitnitz.eu/scope_en) ako generátor tónov, prípadne osciloskop.