

58. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2016/2017

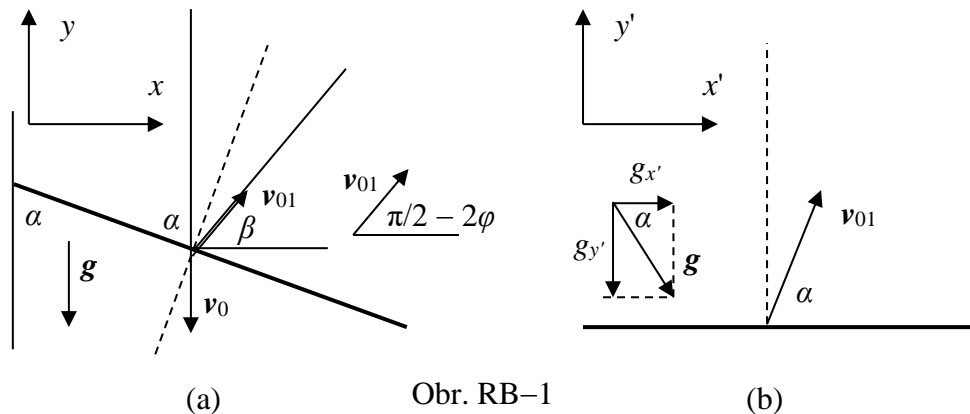
**Kategória B – domáce kolo**

Riešenie úloh

**1. Odraz guľôčky od šikmej plochy**

Riešenie:

- a) Ak predpokladáme nulové trenie, pôsobí na guľôčku pri odraze nulový moment sily vzhľadom na jej os, a preto nedochádza k jej otáčaniu, a tým zvyšovaniu kinetickej energie rotácie guľôčky. Vzhľadom na veľmi krátky čas  $\tau$  kontaktu guľôčky s plochou pri odraze je impulz sily  $F_{gt} \tau$  zanedbateľne malý a zložka hybnosti rovnobežná s plochou sa pri odraze nezmení. Pri dokonale pružnom odraze sa zachováva kinetická energia guľôčky, a teda zložka rýchlosti kolmá na plochu zmení smer na opačný, ale veľkosť zostane rovnaká. Z toho vyplýva, že za daných predpokladov je uhol dopadu  $\alpha$  guľôčky na plochu rovný uhlu odrazu. Situáciu pri odraze znázorňuje obr. RB–1 (a). 1 b



Obr. RB–1

- b) Prvá možnosť (Obr. RB–1 a)

Guľôčka padá na horný koniec šikmej plochy z výšky  $h_0$ . Zo zákona zachovania mechanickej energie rýchlosť dopadu guľôčky na šikmú plochu

$$v_0 = \sqrt{2 g h_0} .$$

Po prvom dopade sa guľôčka odrazí pod uhlom  $\alpha$  vzhľadom na šikmú plochu, obr. RB–1 (a). Nasledujúci pohyb je šikmý vrh.

Šikmý vrh možno riešiť v sústave  $(x, y)$  s vektorom zrýchlenia v zvislom smere osi  $y$ . V smere osi  $x$  je pohyb rovnomerný, v smere osi  $y$  rovnomerne zrýchlený so zrýchlením  $-g$

$$v_x = v_0 \cos \beta \quad v_y = v_0 \sin \beta - g t ,$$

kde  $\beta = \frac{\pi}{2} - 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$  je uhol vrhu vzhľadom na vodorovnú rovinu,

ako vyplýva z obr. RB-1, kde  $\varphi$  sme označili uhol odrazu guľôčky od plochy.

Pozn.:  $\cos(2\alpha - \pi/2) = \sin 2\alpha$ ,  $\sin(2\alpha - \pi/2) = -\cos 2\alpha$ .

Body dopadu guľôčky hľadáme ako priesečníky trajektórie

$$x = v_0 t \cos \beta \quad y = v_0 t \sin \beta - \frac{1}{2} g t^2$$

so spádovou priamkou šikmej plochy

$$y = k x,$$

kde  $k = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$  je smernica spádovej priamky.

Bod dopadu leží na spádovej priamke a s použitím vzťahov pre trajektóriu dostaneme rovnicu

$$v_0 t_1 \sin \beta - \frac{1}{2} g t_1^2 = -\frac{1}{\tan \alpha} v_0 t_1 \cos \beta,$$

z ktorej určíme dobu trvania skoku

$$t_1 = \frac{2v_0}{g} \left( \frac{1}{\tan \alpha} \cos \beta + \sin \beta \right) = \frac{2v_0}{g}.$$

Vzdialenosť medzi bodmi dopadu

$$d_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\left( v_0 \frac{2v_0}{g} \cos \beta \right)^2 + \left( v_0 \frac{2v_0}{g} \sin \beta - \frac{1}{2} g \frac{4v_0^2}{g^2} \right)^2}$$

a po úprave

$$d_1 = \frac{2v_0^2}{g} \sqrt{2 - 2\sin \beta} = \frac{2v_0^2}{g} 2\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{4v_0^2}{g} \cos \alpha.$$

Takto by sa dalo pokračovať až k zovšeobecneniu výsledkov.

Spolu za riešenie podľa prvej možnosti (b1) + obr. RB-1 a 5b

V prípade doriešenia podľa c) časti 4b

Druhá možnosť (b2) je zvoliť súradnicovú sústavu ( $x'$ ,  $y'$ ) s osou  $x'$  rovnobežnou so šikmou plochou a osu  $y'$  kolmou na túto plochu. Zrýchlenie  $g$  má potom zložky  $g_{x'} = g \cos \alpha$  a  $g_{y'} = g \sin \alpha$ , obr. RB-1 (b). V tom prípade ide o zložený pohyb, pričom obidve navzájom kolmé zložky v smeroch osí predstavujú rovnomerne zrýchlené pohyby.

Matematický model tohto pohybu v súradnicovej sústave ( $x'$ ,  $y'$ ) predstavujú štyri rovnice pre časové závislosti kinematických veličín

$$v_{x'} = v_0 \cos \alpha + (g \cos \alpha) t \quad (1)$$

$$v_{y'} = v_0 \sin \alpha - (g \sin \alpha) t \quad (2)$$

$$x' = (v_0 \cos \alpha) t + \frac{1}{2} (g \cos \alpha) t^2 \quad (3)$$

$$y' = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} (g \sin \alpha) t^2, \quad (4) \quad 1 \text{ b}$$

kde zložky začiatočnej rýchlosti sú  $v_{0x'} = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_{0y'} = v_0 \sin \alpha$ .

V bode dopadu po prvom odraze platí  $y' = 0$ . Zo vzťahu (4) dostávame čas dopadu

$$t_1 = \frac{2v_0}{g}$$

a z (3) vzdialenosť miesta dopadu

$$d_1 = 4 \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha. \quad (5)$$

Zložky vektora rýchlosti dopadu

$$v_{x'1} = 3v_0 \cos \alpha,$$

$$v_{y'1} = -v_0 \sin \alpha.$$

Pre uhol dopadu máme

$$\tan \alpha_1 = \frac{v_{y'1}}{v_{x'1}} = -\frac{1}{3} \tan \alpha \quad (6)$$

a rýchlosť dopadu

$$v_1 = \sqrt{v_{x'1}^2 + v_{y'1}^2} = v_0 \sqrt{\sin^2 \alpha + 9 \cos^2 \alpha}. \quad (7) \quad 0,5 \text{ b}$$

Ako vidno z (5) až (7), výsledky závisia okrem  $v_0$  iba od uhlu  $\alpha$ .

Ďalší odraz je pod uhlom  $-\alpha_1$  a so začiatočnou rýchlosťou  $v_{02} \equiv (v_{x'1}, -v_{y'1})$ .

Zo vzťahu (4)

$$y' = -v_{y'1} t - \frac{1}{2} (g \sin \alpha) t^2$$

určíme pre  $y' = 0$  čas letu po druhom odraze

$$t_2 = \frac{2v_0}{g} = t_1. \quad 0,5 \text{ b}$$

Čas druhého skoku je rovnaký ako u prvého.

Zložky vektora rýchlosti

$$v_{x'2} = v_{x'1} + (g \cos \alpha) t_2 = 3v_0 \cos \alpha + g \cos \alpha \frac{2v_0}{g} = 5v_0 \cos \alpha$$

$$v_{y'2} = -v_{y'1} - (g \sin \alpha) t_2 = -v_0 \sin \alpha$$

a výsledná rýchlosť dopadu a uhol dopadu

$$v_2 = v_0 \sqrt{\sin^2 \alpha + 25 \cos^2 \alpha} \quad 0,5 \text{ b}$$

$$\tan \alpha_2 = -\frac{1}{5} \tan \alpha. \quad 0,5 \text{ b}$$

Vzdialenosť bodov prvého a druhého dopadu

$$d_2 = v_{x1} t_2 + \frac{1}{2} (g \cos \alpha) t_2^2 = 8 \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha .$$

Ako vidno z predchádzajúcich výsledkov,  $y'$  zložka rýchlosti dopadu a doba trvania skoku sa nemenia a nezávisia od poradia skoku

$$t_n = \frac{2v_0}{g} = t_1 , \quad v_{y'n} = -v_0 \sin \alpha .$$

Znamená to, že s každým ďalším skokom sa zväčší  $x'$  zložka rýchlosti dopadu o rovnaký prírastok  $2 v_0 \cos \alpha$

$$v_{x'n} = (2n+1) v_0 \cos \alpha , \quad 1 \text{ b}$$

uhol dopadu

$$\tan \alpha_n = -\frac{1}{2n+1} \tan \alpha \quad 1 \text{ b}$$

a vzdialenosť susedných bodov dopadu

$$d_n = v_{x'n-1} t_n + \frac{1}{2} (g \cos \alpha) t_n^2 = 4n \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha .$$

c) Dĺžku  $n$ -tého skoku vyjadríme v tvare

$$d_n = 4n \frac{2h_0 g}{g} \cos \alpha = (8 h_0 \cos \alpha) n . \quad 1 \text{ b}$$

Celková dĺžka preskákanej vzdialenosti

$$D_n = (8 h_0 \cos \alpha) (1 + 2 + \dots + n) = (8 h_0 \cos \alpha) \frac{n(n+1)}{2} .$$

V danom prípade  $D_n = L$  a odtiaľ

$$h_0 = \frac{L}{4 n(n+1) \cos \alpha} .$$

Pre dané hodnoty  $h_0 \approx 64 \text{ mm}$ . 1 b

Celkový čas

$$T_n = n t_1 = n \frac{2\sqrt{2g h_0}}{g} = 2n \sqrt{\frac{2h_0}{g}} .$$

V danom prípade

$$T_n = n t_1 = n \frac{2\sqrt{2g h_0}}{g} = \sqrt{\frac{2 n L}{g (n+1) \cos \alpha}} .$$

Pre dané hodnoty  $T_4 \approx 1,2 \text{ s}$ . 1 b

Uhol dopadu po piatom skoku

$$\alpha_5 = \arctan\left(-\frac{1}{11} \tan \alpha\right) \approx -19^\circ . \quad 1 \text{ b}$$

## 2. Kmity iónu v jednorozmernej mriežke

Riešenie:

- a) Podiel gravitačnej sily  $F_g$  a elektrickej sily  $F_e$  medzi dvoma iónmi

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{G}{k} \left( \frac{m}{e} \right)^2, \text{ kde}$$

$G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$  je gravitačná konštanta a  $k \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$  Coulombova

konštanta. V našom prípade  $\frac{F_g}{F_e} \approx 7,41 \times 10^{-21} \left( \frac{m}{e} \right)^2 \approx 1,9 \times 10^{-34}$ . Gravitačná sila je podstatne menšia ako elektrická sila pôsobiaca medzi dvoma iónmi. Vo výpočte silového pôsobenia medzi iónmi nie je potrebné ju zohľadňovať. 2b

- b) Na ión A pôsobia podľa Coulombovho zákona elektrické sily od ostatných iónov nekonečného reťazca

$$F = ke^2 \left[ -\frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(2a-x)^2} + \frac{1}{(2a+x)^2} - \frac{1}{(3a-x)^2} + \frac{1}{(3a+x)^2} - \dots \right] =$$

$$= -ke^2 \left[ \frac{4ax}{(a^2-x^2)^2} + \frac{8ax}{(4a^2-x^2)^2} + \frac{12ax}{(9a^2-x^2)^2} + \dots \right].$$

Vzťah pre silu je usporiadaný podľa výsledníc síl od dvojíc iónov s rovnakými rovnovážnymi vzdialenosťami od sledovaného iónu. 2b

- c) Pre  $x \ll a$  môžeme v menovateľoch zlomkov zanedbať  $x^2$  v porovnaní s násobkami  $a^2$  a vzťah pre silu upravíme na tvar

$$F = -\frac{4ke^2}{a^3} \left[ 1 + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{9^2} + \frac{4}{16^2} + \dots + \frac{1}{n^3} \dots \right] x = -p x,$$

odkiaľ máme konštantu priamej úmernosti

$$p = \frac{4ke^2}{a^3} \left( 1 + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{9^2} + \frac{4}{16^2} + \dots + \frac{1}{n^3} \dots \right).$$

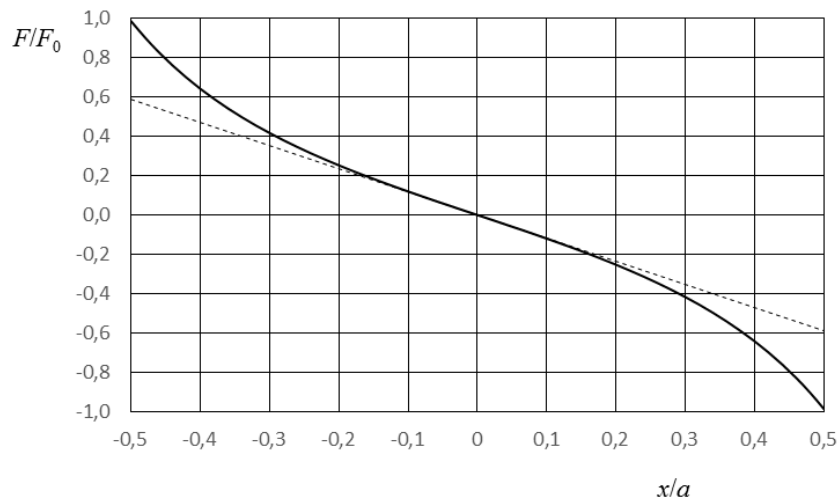
Zátvorka vzťahu je väčšia ako 1. Ak je príspevok  $n$ -tej dvojice iónov menší ako 1/100, zanedbaním príspevku  $n$ -tej dvojice a ďalších dvojíc iónov získame požadovanú presnosť. Keďže  $5^3 = 125$ , stačí uvažovať iba štyri dvojice iónov, a teda

$$p \approx \frac{4ke^2}{a^3} \left( 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \right) \approx 4,71 \frac{ke^2}{a^3}. \text{ Pre dané hodnoty } p \approx 33 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}. \quad 2b$$

- d) Pre účel zobrazenia možno funkciu  $F(x)$  upraviť na normovaný tvar (nie je to však nutné)

$$\frac{F}{F_0} = - \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2} + \frac{2}{\left(4 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2} + \frac{3}{\left(9 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2} + \frac{4}{\left(16 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2} \right] \frac{x}{a},$$

kde  $F_0 = \frac{4k e^2}{a^3}$ . Pre dané hodnoty  $F_0 \approx 28,1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ .



Obr. RB-2

1 b

V grafe je vyznačená priamka, ktorá aproximuje závislosť v okolí nulovej výchylky. Ako vidno, náhrada lineárnou závislosťou je dobrá v rozsahu približne  $-0,1 < x/a < 0,1$ . Z grafu určíme smernicu priamky  $-p^* \approx -1,2/1,0$ . Konštanta  $p = p^* F_0 \approx 34$ .

Odchýlka od hodnoty určenej výpočtom je 1,8 %, čo je pri grafickom výpočte veľmi dobrá presnosť.

1 b

- e) Častica s hmotnosťou  $m$ , na ktorú pôsobí vratná sila priamoúmerná výchylke z rovnovážnej polohy  $F = -p x$ , vykonáva harmonické kmity s frekvenciou

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{p}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4,71 \frac{k e^2}{m a^3}}. \text{ Pre dané hodnoty } f \approx 4,5 \text{ THz}$$

Zodpovedajúca vlnová dĺžka

$$\lambda = \frac{c}{f}. \text{ Pre dané hodnoty } \lambda \approx 66 \mu\text{m}.$$

2 b

EM vlnenie s touto vlnovou dĺžkou zodpovedá infračervenému žiareniu – pásnu teplotného vyžarovania telies.

### 3. Hmlová komora

Riešenie:

- a) Ak sa častica pohybuje v magnetickom poli s indukciou  $\mathbf{B}$ , pôsobí na ňu Lorentzova sila

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

kde  $Q$  je náboj častice.

Sila  $\mathbf{F}$  je kolmá na smer rýchlosti  $\mathbf{v}$  a na vektor  $\mathbf{B}$ . Ak je vektor  $\mathbf{v}$  kolmý na vektor  $\mathbf{B}$ , pohybuje sa častica v rovine kolmej na  $\mathbf{B}$ . Keďže sila  $\mathbf{F}$  je kolmá na smer pohybu (smer vektora  $\mathbf{v}$ ), je pohyb rovnomerný a zakrivený, pričom polomer krivosti trajektórie častice určíme zo vzťahu pre normálovú (dostredivú) zložku sily, resp. zrýchlenia

$$F = QvB = m \frac{v^2}{R}.$$

Odtiaľ určíme polomer krivosti trajektórie a uhlovú rýchlosť

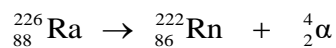
$$R = \frac{mv}{QB} \quad \text{a} \quad \omega_c = \frac{v}{R} = \frac{QB}{m}. \quad (2) \quad 1 \text{ b}$$

Ak je hybnosť častice  $mv$  konštantná, je polomer  $R$  konštantný a trajektória častice je kružnica. Pri rovnomernom pohybe po kružnici je veľkosť uhlovej rýchlosti rovná veľkosti uhlovej frekvencie pohybu po kružnicovej trajektórii, ktorá sa nazýva *cyklotrónová uhlová frekvencia*.

Stopa častice v hmlovej komore má tvar špirály, ktorá sa uzatvára smerom do stredu krivosti. Častica s nábojom, ktorá sa pohybuje so zrýchlením (v našom prípade dostredivým), vyžaruje elektromagnetické žiarenie interakciou s plynom v komore, znižuje svoju energiu a rýchlosť. Podľa (2) sa uhlová rýchlosť nemení, ale znižuje sa polomer krivosti  $R$ . Častica sa pohybuje po špirále s postupným približovaním do stredu krivosti. 1 b

Kladná častica vytvárajúca špirálu vpravo podľa obr. B-3 sa pohybovala proti smeru chodu hodinových ručičiek a podľa (1) je smer vektora  $\mathbf{B}$  za rovinu nákresu. 1 b

- b)  $\alpha$  premenu jadra  $^{226}\text{Ra}$  opisuje rovnica



Vzniknuté jadro je radón. Častica  $\alpha$  i zvyšok atómu majú náboj  $Q = \pm e$ , kde  $e$  je elementárny náboj. 2 b

- c) Pri premene sa zachováva hybnosť sústavy

$$p_\alpha = p_{\text{Rn}}, \text{ resp. } mv = Mu,$$

kde  $m = 6,643 \times 10^{-27}$  kg je hmotnosť  $\alpha$ -častice,  $M = 3,686 \times 10^{-25}$  kg hmotnosť iónu radónu,  $v$  rýchlosť  $\alpha$ -častice a  $u$  rýchlosť iónu radónu.

Celková uvoľnená energia je kinetická energia oboch častíc

$$E = \frac{p_{\alpha}^2}{2m} + \frac{p_{Rn}^2}{2M} = \frac{p_{\alpha}^2}{2} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right).$$

Odtiaľ máme

$$p_{\alpha} = mv = \sqrt{2E \frac{mM}{m+M}}.$$

Z (2) vyplýva, že začiatočný polomer zakrivenia trajektórie obidvoch častíc je rovnaký

$$R = \frac{1}{qB} \sqrt{2E \frac{mM}{m+M}}. \text{ Pre dané hodnoty } R \approx 7,88 \text{ cm.} \quad 2 \text{ b}$$

Uhlové rýchlosti obidvoch častíc sa významne líšia

$$\omega_{c\alpha} = \frac{QB}{m}, \quad \omega_{cRn} = \frac{QB}{M}, \text{ tzn. } \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega_{cRn}} = \frac{M}{m}.$$

Pre dané hodnoty  $\omega_{c\alpha} \approx 4,82 \times 10^{18} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $\omega_{cRn} \approx 8,68 \times 10^{16} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . 2 b

#### 4. Termodynamický dej

Riešenie:

- a) Peltierov článok je tvorený spojením dvoch rôznych vodičov alebo polovodičov. Na spoji vzniká kontaktné napätie  $U$ , ktoré závisí od spojených materiálov. Ak spojom prechádza prúd  $I$  v smere napätia  $U$ , je výkon elektrického prúdu  $P = UI > 0$ . Spoj sa zahrieva a odovzdáva teplo do okolitého prostredia. Ak sa zmení smer prechádzajúceho prúdu, výkon  $P = -UI < 0$  a spoj sa chladí. Spoj odoberá teplo zo svojho okolia. 1 b
- b) Pri zmene stavu ideálneho plynu platí stavová rovnica

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

odkiaľ máme

$$T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}. \text{ Pre dané hodnoty } T_2 = 600 \text{ K.}$$

Pre adiabatický dej BA máme

$$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa},$$

odkiaľ

$$p_2 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa}. \text{ Pre dané hodnoty } p_2 \approx 134 \text{ kPa.} \quad 1 \text{ b}$$

Zo stavovej rovnice



$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_C V_2}{T_C},$$

určíme teplotu plynu v stave C

$$T_C = T_1 \frac{p_C V_2}{p_1 V_1} = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1}. \text{ Pre dané hodnoty } T_C \approx 267 \text{ K.} \quad 1 \text{ b}$$

- c) V časti AB lineárna závislosť tlaku  $p$  ako funkcie objemu  $V$  pre dané začiatočné a konečné podmienky je

$$p = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} (V - V_1), \text{ kde } p = p_1 \frac{TV_1}{T_1 V}.$$

Odtiaľ máme

$$T = T_1 \left[ 1 + \frac{p_2 - p_1}{p_1} \frac{Sx}{V_2 - V_1} \right] \frac{V_1 + Sx}{V_1}. \quad 1 \text{ b}$$

V izochorickej časti BC sa poloha piestu nemení a platí.

$$x_2 = \frac{V_2 - V_1}{S}. \quad 1 \text{ b}$$

Teplota sa mení z hodnoty  $T_B$  na hodnotu  $T_C$ .

V adiabatickej časti CA platí

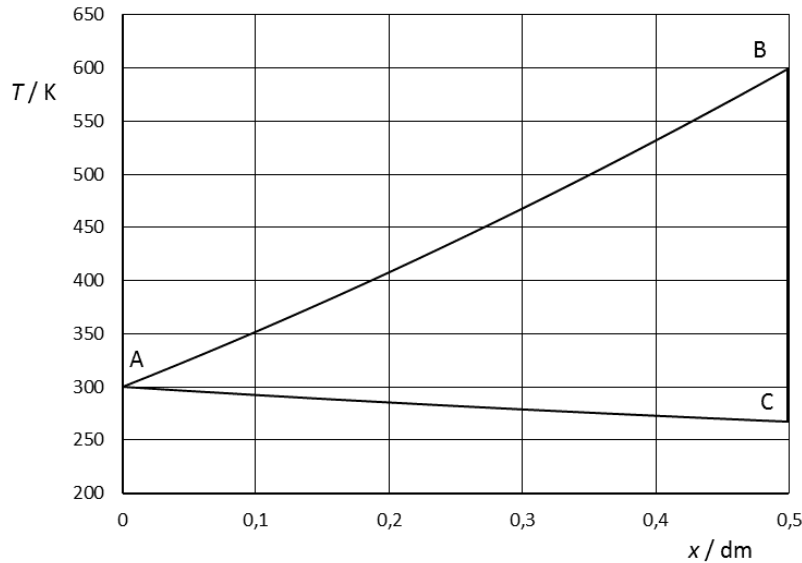
$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p V}{T},$$

odkiaľ máme

$$T = T_1 \frac{p V}{p_1 V_1}, \text{ pričom } \frac{p}{p_1} = \left( \frac{V_1}{V} \right)^{\kappa},$$

odkiaľ

$$T = T_1 \left( \frac{V_1}{V} \right)^{\kappa-1} = T_1 \left( \frac{V_1}{V_1 + Sx} \right)^{\kappa-1}. \quad 1 \text{ b}$$



Obr. RB-3 1 b

- d) Keďže sa cyklus vracia do začiatočného bodu, je celková zmena vnútornej energie  $\Delta U = 0$ . Celková bilancia práce a tepla je tak  $W = Q$ . Stačí teda určiť jednu z veličín. Tretia časť cyklu je adiabatický dej, pri ktorom nedochádza k tepelnej výmene. Stačí určiť teplo  $Q_{AB}$  dodané v časti AB a teplo  $-Q_{BC}$  odobraté v časti BC.

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = n C_V (T_B - T_A) + \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1),$$

kde tepelná kapacita  $n C_V = \frac{i}{2} n R = \frac{1}{\kappa - 1} n R$ , a teda

$$Q_{AB} = \frac{1}{\kappa - 1} (p_2 V_2 - p_1 V_1) + \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_2 - V_1).$$

V druhej časti sa práca nekoná, a preto

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = n C_V (T_C - T_B) = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} - \frac{p_2 V_2}{\kappa - 1}.$$

Celkové teplo a práca plynu

$$W = Q = Q_{AB} + Q_{BC} = -\frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_2 - V_1) + \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1}.$$

Pre dané hodnoty  $W = Q \approx 43,5 \text{ J}$ .

2 b

## 5. Ritzov paradox

Riešenie:

- a) Ak predpokladáme rovnomerný pohyb po kružnicovej trajektórii, je gravitačná sila, ktorou pôsobí Slnko na Zem, rovná zotrvačnej (odstredivej) sile

$$G \frac{M_Z M_S}{R^2} = M_Z \frac{v^2}{R},$$

odkiaľ máme

$$v = \sqrt{G \frac{M_S}{R}} .$$

Pre hodnoty  $M_S = 1,99 \times 10^{30}$  kg,  $R = 1,50 \times 10^8$  km,  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>·kg<sup>-2</sup>, dostaneme  $v \approx 29,7$  km·s<sup>-1</sup>. 2 b

- b) Podľa klasickej predstavy sa svetlo z krajných bodov A a B trajektórie Zeme k pozorovateľovi v bode O pohybuje rôznymi rýchlosťami  $c + v$  a  $c - v$ . Z bodu B sa tak dostane k pozorovateľovi za kratší čas ako z bodu A. Ak je toto skrátenie času šírenia svetla rovné dobe prechodu Zeme z polohy A do polohy B, prejde svetlo z obidvoch polôh A, B k pozorovateľovi O súčasne.

$$t_A - t_B = \frac{d}{c-v} - \frac{d}{c+v} = d \frac{2v}{c^2 - v^2} = \frac{T}{2} ,$$

odkiaľ máme

$$d = T \frac{c^2 - v^2}{4v} , \quad 1 \text{ b}$$

kde  $T = 1$  rok,  $c = 3,00 \times 10^8$  m·s<sup>-1</sup>.

Pre dané hodnoty  $d \approx 2,39 \times 10^{16}$  km. 0,5 b

Pozorovateľ vidí Zem v dvoch polohách (v polohe A aj B) súčasne. 0,5 b

- c) 1 ly je vzdialenosť, ktorú prejde svetlo vo vákuu za dobu 1 tropický rok.

$c = 299\,792\,458$  m/s,  $T = 365,2421991$  d (365 d 5 h 48 m 46 s).

1 ly = 9 460 730 472 580 800 m (presne)  $\approx 9,4607 \times 10^{15}$  m. 0,5 b

1 AU je približne rovná strednej vzdialenosti Zeme od Slnka a presne je definovaná

1 AU = 149 597 870 700 m (presne)  $\approx 1,4960 \times 10^{11}$  m. 0,5 b

1 pc je vzdialenosť, z ktorej vidno dĺžku 1 AU pod ulom 1".

1 pc = 3,08567758  $\times 10^{16}$  m  $\approx 3,0856 \times 10^{16}$  m. 0,5 b

Vzdialenosť  $d$  je v týchto jednotkách

$d \approx 2,39 \times 10^{16}$  km  $\approx 2,53 \times 10^3$  ly  $\approx 1,60 \times 10^8$  AU  $\approx 0,775$  pc. 1,5 b

Vzdialenosť Neptúna od Slnka  $d_N \approx 10$  AU, sonda Voyager 1 bola na konci roku 2015 vo vzdialenosti 133 AU a stala sa pozemským telesom najvzdialenejším od Slnka.

Vzdialenosť najbližšej hviezdy Proxima Centauri 4,22 ly.

Hviezda Aludra v súhvezdí Veľký pes je vzdialená približne 3 000 ly. 1 b

Jedna z najjasnejších hviezd Deneb v súhvezdí Labute má odhadovanú vzdialenosť 1 500 ÷ 3 000 ly.

- d) Aby sa dali rozpoznať dve polohy A a B, aby sa „nezliali“ so Slnkom, musela by byť rozlišovacia schopnosť teleskopu  $\Delta\varphi < \alpha/2 = R/d$ . Pre dané hodnoty  $\Delta\varphi < 1$  AU /  $1,6 \times 10^5$  AU  $\approx 6,25 \times 10^{-9}$  rad  $\approx 0,0013$ ". 0,5 b

Z výsledku vidno, že rozlišovacia schopnosť by musela byť približne 40× menšia ako u Hubblovho vesmírneho teleskopu. 0,5 b

- e) Rozlišovacia schopnosť teleskopu je približne  $\Delta\varphi \approx \lambda/D$ , presnejšie  $1,22 \lambda/D$ , kde  $\lambda$  je vlnová dĺžka svetla a  $D$  priemer objektívu teleskopu.

Hubbllov vesmírny teleskop má priemer objektívu  $D = 2,4$  m, z čoho máme pre vlnovú dĺžku  $\lambda = 500$  nm rozlišovaciu schopnosť  $\Delta\varphi \approx 2,54 \times 10^{-7}$  rad  $\approx 0,052''$ . Táto hodnota zodpovedá hodnote uvádzanej v zadaní.

1 b

## 6. Elektrický filter

Riešenie:

a) V schéme na obr. B-6 sú označené uzly A, B, C a spoločný uzol D.

Impedancia článku  $R_2C$

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C}.$$

Impedancia medzi uzlami B a D (induktor  $L$  paralelne s článkom  $R_2C$ )

$$Z_{BD} = \frac{j\omega L Z_2}{j\omega L + Z_2} = \frac{j\omega L \left( R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{j\omega L + R_2 + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Celková vstupná impedancia

$$Z_{AD} = R_1 + Z_{BD} = R_1 + \frac{j\omega L \left( R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{j\omega L + R_2 + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Fázor prúdu  $I_1$

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_{AD}} = \frac{U_1}{R_1} \frac{1 + j \left( \frac{\omega R_1}{\omega_1 R_2} - \frac{\omega_2}{\omega} \right)}{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} + j \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) - \frac{\omega_2}{\omega} \right]}. \quad (1)$$

V uzle B sa prúd delí do dvoch vetiev

$$I_2 = I_1 \frac{j\omega L}{j\omega L + Z_2} = \frac{U_1}{R_2} \frac{j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} + j \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) - \frac{\omega_2}{\omega} \right]}.$$

Výstupné napätie  $U_2 = I_2/(j\omega C)$ , a odtiaľ

$$A_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{\omega_2}{\omega_1}}{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} + j \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) - \frac{\omega_2}{\omega} \right]}.$$

Efektívne hodnoty predstavujú absolútne hodnoty týchto komplexných veličín. Pomery uhlových frekvencií nahradíme rovnakými pomermi frekvencií

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{f R_1}{f_1 R_2} - \frac{f_2}{f}\right)^2}{\left(1 + \frac{f_2}{f_1}\right)^2 + \left[\frac{f}{f_1} \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) - \frac{f_2}{f}\right]^2}}, \quad 1 \text{ b}$$

$$I_2 = \frac{U_1}{R_2} \frac{\frac{f}{f_1}}{\sqrt{\left(1 + \frac{f_2}{f_1}\right)^2 + \left[\frac{f}{f_1} \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) - \frac{f_2}{f}\right]^2}}, \quad 1 \text{ b}$$

$$A_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{f_2}{f_1}}{\sqrt{\left(1 + \frac{f_2}{f_1}\right)^2 + \left[\frac{f}{f_1} \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) - \frac{f_2}{f}\right]^2}}. \quad 1 \text{ b}$$

Keďže činný výkon je nenulový iba na rezistoroch, činný výkon zdroja je rovný súčtu príkonov obidvoch rezistorov obvodu

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = \frac{U_1^2}{R_1} \frac{1 + \frac{R_1}{R_2} \left(\frac{f}{f_1}\right)^2 + \left(\frac{f R_1}{f_1 R_2} - \frac{f_2}{f}\right)^2}{\left(1 + \frac{f_2}{f_1}\right)^2 + \left[\frac{f}{f_1} \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) - \frac{f_2}{f}\right]^2}. \quad 1 \text{ b}$$

- b) Pri rezonančnej frekvencii je pomer  $I_1/U_1$  reálny, tzn. komplexné čísla v čitateli a v menovateli vo vzťahu (1) majú pre  $\omega = \omega_r$  rovnaký argument

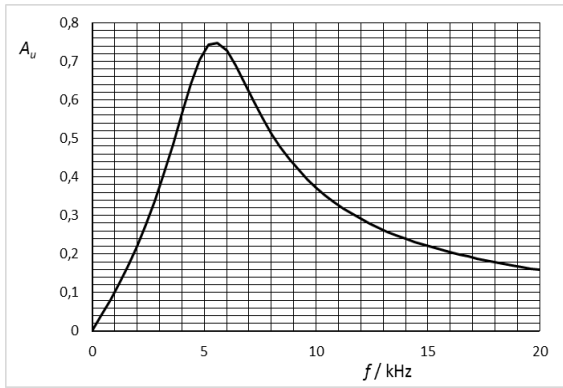
$$\frac{\omega_r R_1}{\omega_1 R_2} - \frac{\omega_2}{\omega_r} = \frac{\frac{\omega_r}{\omega_1} \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) - \frac{\omega_2}{\omega_r}}{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}}, \text{ odkiaľ máme}$$

$$f_r = \sqrt{\frac{f_1 f_2}{R_1 - f_1}}, \text{ pre } \frac{f_1}{f_2} < \frac{R_1}{R_2}. \quad 1 \text{ b}$$

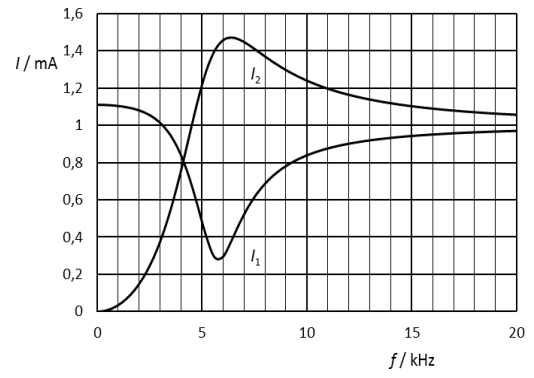
Pre dané hodnoty  $f_r \approx 5,88$  kHz.

Pre  $\frac{f_1}{f_2} \geq \frac{R_1}{R_2}$  k rezonancii nedochádza.

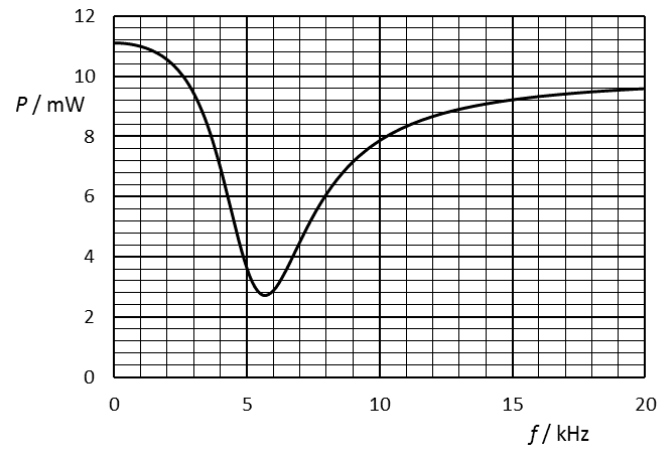
- c) Pre dané odpory  $R_1, R_2$  rezistorov a charakteristické frekvencie  $f_1, f_2$  zostrojíme požadované grafy pre veličiny  $A_U, I_1, I_2$  a  $P$ , ako funkcie frekvencie  $f$  zdroja, napr. pomocou programu EXCEL alebo manuálne, obr. RB-4, obr. RB-5, obr. RB-6 a z nich určíme maximum  $A_{U \max}$  napät'ového prenosu a tomu zodpovedajúcu frekvenciu  $f_A$ , a minimálnu hodnotu  $P_{\min}$  výkonu zdroja a tomu zodpovedajúcu frekvenciu  $f_P$ .  
 $A_{U \max} \approx 0,75, f_A \approx 5,5$  kHz,  $P_{\min} \approx 3,8$  mW,  $f_P \approx 5,7$  kHz. 1 b + 1 b



Obr. RB-4



Obr. RB-5



Obr. RB-6

Obrázky 1 b + 1 b + 1 b

## 7. Galvanické vytváranie tenkej vodivej vrstvy - experimentálna úloha

Poznámky k riešeniu:

Konduktivita medi  $\gamma = 5,96 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  
tomu zodpovedá  $\delta = 6,52 \text{ } \mu\text{m}$ .

Pre trojnásobok  $3\delta$  je približne  $d \approx 20 \text{ } \mu\text{m}$

Ak použijeme stavebný klinec  $7 \times 200 \text{ mm}$ , je pokovovaná plocha  $S \approx 40 \text{ cm}^2$ .

Zodpovedajúce látkové množstvo  $n = \frac{m}{M} = \frac{\rho d S}{M}$ ,

náboj  $Q = 2e n N_A = 2 \frac{\rho d S}{M} e N_A \approx 2,14 \text{ kC}$

a hmotnosť  $m = \rho S d \approx 712 \text{ mg}$ .

Pri odporúčanej prúdovej hustote  $J \approx 5 \text{ A/dm}^2$  a ploche  $S$  je prúd  $I \approx 2 \text{ A}$ ,  
tzn. čas pokovovania  $t = Q/I \approx 18 \text{ minút}$ .

---

### 58. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie B

Autori úloh:                      Ľubomír Konrád (1, 2, 3, 4), Boris Lacsny (5), Ivo Čáp (6, 7)

Recenzia a úprava:              Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha

Redakcia:                          Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal:                                IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017