

## 58. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2016/2017

*Kategória C – domáce kolo*

*Riešenie úloh*

### 1. Tranzit Merkúra cez slnečný kotúč

Riešenie:

a)

Planéta	$T_p$ (dni)	$M_p$ ( $\times 10^{24}$ kg)	$R_p$ ( $\times 10^6$ m)	$a_p$ ( $\times 10^{10}$ m)	$\rho_p$ ( $\times 10^3$ kg·m <sup>-3</sup> )	$\varphi$ (°)	$T_{p \text{ vyp}}$ (dni)
Merkúr	87,969	0,3285	2,440	5,791	5,40	0,18	87,9
Venuša	224,70	4,867	6,052	10,82	5,24	1,01	224,7
Zem	365,26	5,974	6,378	14,96	5,50	-	365,3
Mars	686,96	0,6419	3,402	22,79	3,89	0,30	686,9
Jupiter	4 335	1899,0	71,49	77,84	1,24	0,78	4 335
Saturn	10 756	568,5	58,23	142,9	0,69	0,31	10 759
Urán	30 707	86,83	25,56	287,1	1,24	0,06	30 707
Neptún	60 190	102,4	24,62	449,8	1,64	0,04	60 216

2 b

- b) Pri maximálnom priblížení sú vzdialenosti jednotlivých planét od Zeme rovné rozdielu polomerov ich trajektórií. Zorný uhol  $\varphi$  určíme zo vzťahu

$$\varphi = \frac{2R_p}{|a_p - a_z|} \text{ v radiánoch} \qquad \varphi = \frac{2R_p}{|a_p - a_z|} \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \frac{60'}{1^\circ} \text{ v minútach}$$

*Pozn.: Vonkajšie planéty pozorujeme pri maximálnom priblížení v noci, vnútorné planéty (Merkúr, Venuša) cez deň ako tieň na slnečnom kotúči*

2 b

- c) Z rovnováhy gravitačnej a zotrvačnej (odstredivej) sily máme

$$G \frac{M_s M_p}{a_p^2} = M_p a_p \left( \frac{2\pi}{T_p} \right)^2,$$

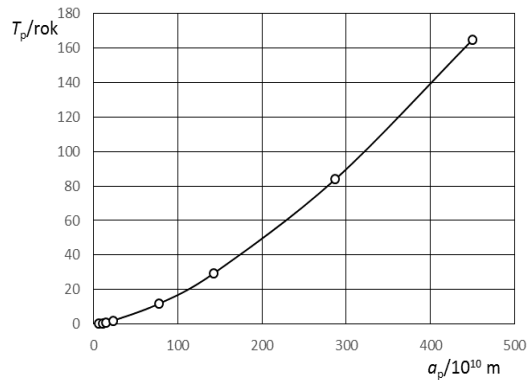
odkiaľ

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{a_p^3}{G M_s}}.$$

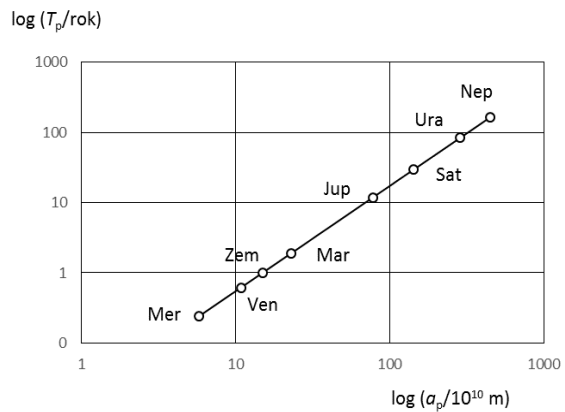
1 b

Hodnoty sú doplnené do tabuľky ako  $T_{p \text{ vyp}}$ . ( $G = 6,67 \times 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>·kg<sup>-2</sup> je Newtonova gravitačná konštanta)

Graf závislosti  $T_p$  od  $a_p$



Obr. RC-1 1 b



Obr. RC-2 1 b

Ako vidno, vypočítané hodnoty zodpovedajú publikovaným hodnotám získaným z astronomických meraní.

Výhoda log–log grafu je jednak v tom, že pre danú závislosť máme lineárny vzťah (priamka) a jednak v tom, že sa rovnomerne zobrazujú malé i veľké intervaly premenných na osiach (v ľavom grafe sú blízke planéty nerozlišiteľné, v log–log grafe sú planéty na priamke rozdelené pomerne rovnomerne).

1 b

- d) K prechodu Merkúra cez slnečný kotúč pozorovanému zo Zeme dochádza vtedy, keď sa Merkúr nachádza na spojnici Zem–Slnko. To sú body, v ktorých trajektória Merkúra pretína rovinu trajektórie Zeme (rovinu ekliptiky). Podľa obrázku C–1 sú také body dva. Zem prechádza týmito bodmi raz za pol roka, tzn. s periódou  $T_{pZ}/2$ . Časy prechodu cez tieto body sú  $t_Z = n T_{pZ}/2$ , kde  $n$  je celé číslo.

Merkúr prechádza týmito bodmi s periódou  $T_{pM}/2$ , pričom v jednom bode klesá pod rovinu ekliptiky (v máji), v druhom stúpa nad rovinu ekliptiky (o pol roka v novembri). Časy prechodu cez rovinu ekliptiky sú  $t_M = k T_{pM}/2$ , kde  $k$  je celé číslo.

Ak nastane prípad  $t_Z = t_M$ , sú Slnko, Merkúr a Zem v jednej priamke. Ak uvažujeme začiatkový stav prechod v máji 2016, bude ďalší májový prechod, ak existuje dvojica párných čísel  $n$  a  $k$  (celé obehy trajektórie). Ak bude podmienka  $t_Z = t_M$  splnená pre dvojicu nepárnych čísel  $n$  a  $k$ , nastane novembrový prechod. Ak by bola pre  $t_Z = t_M$  kombinácia čísel  $n$  a  $k$  párne–nepárne, budú planéty na jednej priamke ale na opačných stranách od Slnka a prechod Merkúra cez slnečný kotúč sa nepozoruje.

Otestujme predpovedané časy prechodov podľa zadania pre  $T_{pZ} = 1,000$  roka a  $T_{pM} = 0,241$  roka:

Pre november 2019 ( $t_Z = 3,5$  roka)  $n = 7$ . V tom prípade  $k \approx 29$ . Obidve čísla sú nepárne, čo zodpovedá novembrovému prechodu. 0,5 b

Pre november 2023 ( $t_Z = 7,5$  roka)  $n = 15$  a  $k \approx 62$  – Merkúr a Zem budú na opačných stranách od Slnka a prechod cez slnečný kotúč nenastane. 0,5 b

( Pozn.: Pre november 2032 ( $t_Z = 16,5$  roka)  $n = 33$  a  $k \approx 137$  – novembrový prechod.)

Pre november 2039 ( $t_Z = 23,5$  roka)  $n = 47$  a  $k \approx 195$  – novembrový prechod. 0,5 b

Pre máj 2049 ( $t_z = 33$  roky)  $n = 66$  a  $k \approx 274$  – obidve čísla sú párne, ide o májový prechod.  
0,5 b

*Pozn.: Pri pohľade zo Zeme uhlový rozmer Slnka  $\varphi_s \approx 0,5^\circ$ .*

*Rovina trajektórie Merkúra zvierá s rovinou ekliptiky uhol  $\delta = 7^\circ \approx 0,122$  rad.*

*Najväčšia vzdialenosť Merkúra od roviny ekliptiky*

$$z_m \approx 5,79 \times 10^{10} \text{ m} \times 0,122 \text{ rad} \approx 7,06 \times 10^9 \text{ m}.$$

*Túto vzdialenosť vidíme zo Zeme pri maximálnom priblížení pod uhlom*

$$\alpha_m = \pm 7,06 \times 10^9 \text{ m} / (14,9 - 5,79) \times 10^{10} \text{ m} \approx \pm 7,75 \times 10^{-2} \text{ rad} \approx \pm 4,4^\circ.$$

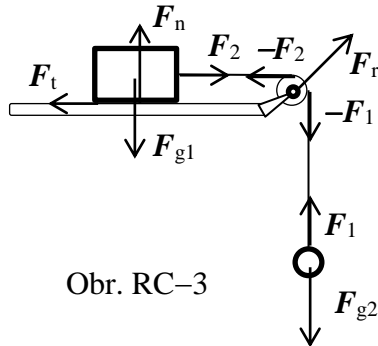
*Uhlový priemer slnečného kotúča  $0,5^\circ$  z rozsahu zdanlivého vychýľovania Merkúra od roviny ekliptiky  $4,4^\circ$  predstavuje približne  $\pm 11$  %.*

*Ak nedostaneme číslo  $k$  presne celé, ale od najbližšieho celého čísla sa líši o niekoľko %, je podmienka prechodu cez slnečný kotúč splnená. Ak si pozriete záznamy pozorovania prechodu, napr. [http://astroportal.sk/pozorovania/merkur\\_prechody.html](http://astroportal.sk/pozorovania/merkur_prechody.html), vidíte, že tieň Merkúra neprechádza vždy stredom slnečného kotúča.*

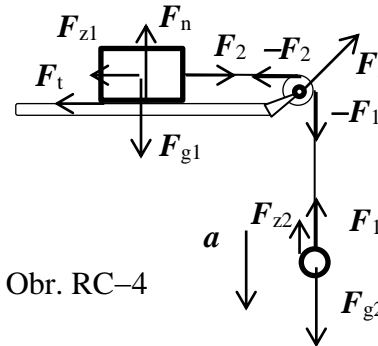
## 2. Mechanická sústava

Riešenie:

a)



Obr. RC-3



Obr. RC-4

1 b

Ak je sústava v pokoji, obr. RC-3, pôsobí na guľu tiažová sila  $F_{g2}$ , ktorá je v rovnováhe s ťahovou silou nite  $F_1$ , pričom platí  $F_g = m g = F_1$ . Na hranol pôsobia v zvislom smere tiažová sila  $F_{g1}$  a tlaková sila podložky  $F_n$ , pričom  $F_{g1} = F_n$ . Vo vodorovnom smere pôsobia sily  $F_2$  ťahu nite a v opačnom smere sila  $F_t$  statického trenia, pričom  $F_2 = F_t \leq f F_n$ . Na kladku pôsobia sily ťahu nite  $-F_1$  a  $-F_2$  a sila  $F_r$  reakcie v ložisku kladky. V pokoji pre sily ťahu nite platí  $F_1 = F_2 = F$ .

Pre silu statického trenia máme

$$F_t = m g \leq f M g,$$

odkiaľ dostaneme podmienku statickej rovnováhy

$$m \leq f M = m_1. \text{ Pre dané hodnoty } m_1 \approx 24 \text{ g.}$$

1 b

Ak  $m \leq m_1$ , sústava zostáva po zavesení guľe v pokoji.

- b) Ak zavesíme na niť guľu s hmotnosťou  $m_2 > m_1$ , začne sa sústava pohybovať so zrýchlením  $a$ , obr. RC-4. Na guľu pôsobí zotrvačná sila  $F_{z2} = -m_2 a$  a na hranol  $F_{z1} = -M a$ . Keďže zotrvačnosť kladky neuvažujeme, platí  $F_1 = F_2 = F$ . Trenie medzi hranolom a stolom sa stáva šmykové a platí  $F_t = f F_n = f M g$ .

Rovnice pohybu guľe a hranola v inerciálnej vzťažnej sústave sú (v IVS sa zotrvačné sily neuplatnia)

$$m_2 a = m_2 g - F$$

$$M a = F - f M g.$$

Ak rovnice sčítame a vylúčime tak silu  $F$ , máme

$$a_1 = \frac{m_2 - f M}{m_2 + M} g.$$

2 b

- c) Ak sa guľa pohybuje po kružnici s polomerom  $l$ , pôsobí na ňu navyše zotrvačná (odstredivá) sila  $F_z$ , ktorá má v najnižšom bode trajektórie zvislý smer nadol, obr. RD-3, pričom platí

$$F_z = m \frac{v_1^2}{l}$$

kde  $v_1$  je rýchlosť guľe v najnižšom bode jej trajektórie.

Ak má zostať hranol v pokoji (statické trenie), platí podmienka

$$F_t = m g + m \frac{v_1^2}{l} \leq f F_n = f M g . \quad (1)$$

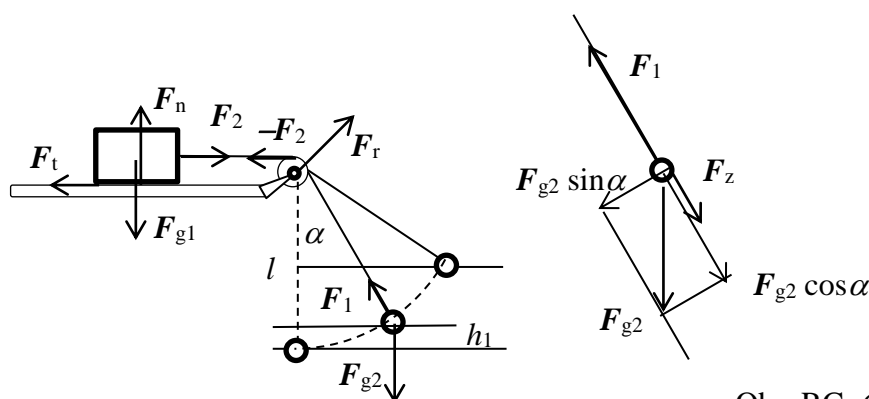
Rýchlosť pohybu guľe určíme zo zákona zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = m g h, \text{ resp. } v_1 = \sqrt{2 g h} .$$

Po dosadení do (1) máme

$$m \leq f \frac{M}{1 + \frac{2h}{l}} = m_3 . \text{ Pre dané hodnoty } m_3 \approx 12 \text{ g.} \quad 2 \text{ b}$$

- d) V šikmej polohe pri pohybe guľe napína niť kosínusová zložka tiažovej sily a zotrvačná (odstredivá) sila  $F = F_{g2} \cos \alpha + m_4 v^2/l$ , obr. RC-6 vpravo.



Obr. RC-6

1 b

Ak má zostať hranol v pokoji  $F_t = F \leq f M g$ .

Rýchlosť určíme z poklesu potenciálnej energie

$$\frac{1}{2} m_4 v^2 = m_4 g (h - h_1) ,$$

kde  $h_1 = l - l \cos \alpha$ .

Po dosadení

$$m_4 g \cos \alpha + \frac{2 m_4 g [h - l + l \cos \alpha]}{l} \leq f M g ,$$

odkiaľ máme

$$\cos \alpha \leq \frac{1}{3} \left[ f \frac{M}{m_4} + 2 \left( 1 - \frac{h}{l} \right) \right] = \cos \alpha_1,$$

kde rovnosť určuje medzný uhol  $\alpha_1$ .

Pre dané hodnoty  $\cos \alpha_1 \approx 0,87$ ,  $\alpha_1 \approx 30^\circ$ .

2 b

### 3. Hádzanie loptičky

Riešenie:

a) Matematický model šikmého vrhu

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad (1)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t, \quad (2)$$

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (3)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (4)$$

4 × 0,5 b

b) Pre bod dopadu loptičky platí  $y_D = 0$ . Z funkcie (4) máme

$$y_D = 0 = v_0 t_D \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_D^2, \text{ a teda } v_0 \sin \alpha = \frac{1}{2} g t_D. \quad (5)$$

Z funkcie (3) dostávame

$$x_D = D - d = v_0 t_D \cos \alpha, \text{ a teda } v_0 \cos \alpha = \frac{D - d}{t_D}. \quad (6)$$

Zo vzťahov (5) a (6) máme

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{D - d}{t_D}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g t_D\right)^2}. \quad (7) \quad 1 \text{ b}$$

Z pomeru oboch vzťahov máme pre uhol vrhu  $\alpha$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \frac{g t_D^2}{D - d}. \quad (8) \quad 1 \text{ b}$$

c) V najvyššom bode H trajektórie je  $v_y = 0$  (stúpanie sa zastaví). Z (2) určíme čas

$$t_H = \frac{1}{g} v_0 \sin \alpha = \frac{t_D}{2}.$$

Zo vzťahu (4) a po dosadení z (5) máme

$$y_H = h = \frac{t_D}{2} v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{t_D}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{t_D}{2}\right)^2. \quad (9) \quad 1 \text{ b}$$

d) Ako vidno na obr. C-3, zorná priamka je dotyčnicou k trajektórii loptičky. Vektor rýchlosti  $\mathbf{v}$  má tiež vždy smer dotyčnice. Potom musí platiť

$$\tan \varphi = \frac{-v_{Ty}}{v_{Tx}} = -\frac{v_0 \sin \alpha - g t_T}{v_0 \cos \alpha}. \quad (10)$$

Pozn.: Keďže bod T je na zostupnej časti trajektórie, je  $v_{Ty} < 0$ . Pre získanie kladného uhla  $\varphi$  dosadíme do vzťahu kladnú hodnotu  $-v_{Ty}$ .

Pre uhol  $\varphi$  ďalej platí

$$\tan \varphi = \frac{y_T}{D - x_T} = \frac{t_T v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_T^2}{D - t_T v_0 \cos \alpha}. \quad (11)$$

Z rovnosti pravých strán vzťahov (10) a (11)

$$\frac{v_0 \sin \alpha - g t_T}{v_0 \cos \alpha} = \frac{t_T v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_T^2}{D - t_T v_0 \cos \alpha}$$

dostávame kvadratickú rovnicu pre čas  $t_T$

$$t_T^2 - 2 \frac{D}{v_0 \cos \alpha} t_T + \frac{2D}{g} \tan \alpha = 0,$$

ktorá má riešenie

$$t_T = \frac{D}{v_0 \cos \alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 - \frac{2D}{g} \tan \alpha}.$$

Môžeme sa presvedčiť, že pre podmienku  $x_T < D$  má fyzikálny zmysle iba znamienko mínus. S použitím výsledkov (5) a (6) čas upravíme na výsledný tvar

$$t_T = t_D \frac{D}{D-d} \left(1 - \sqrt{\frac{d}{D}}\right). \quad (12)$$

Dosadením do (10) a po úprave s použitím (5) a (6) dostávame výsledný vzťah

$$\tan \varphi = \left[ -\frac{1}{2} + \frac{D}{D-d} \left(1 - \sqrt{\frac{d}{D}}\right) \right] \frac{g t_D^2}{D-d}. \quad (13) \quad 1 \text{ b}$$

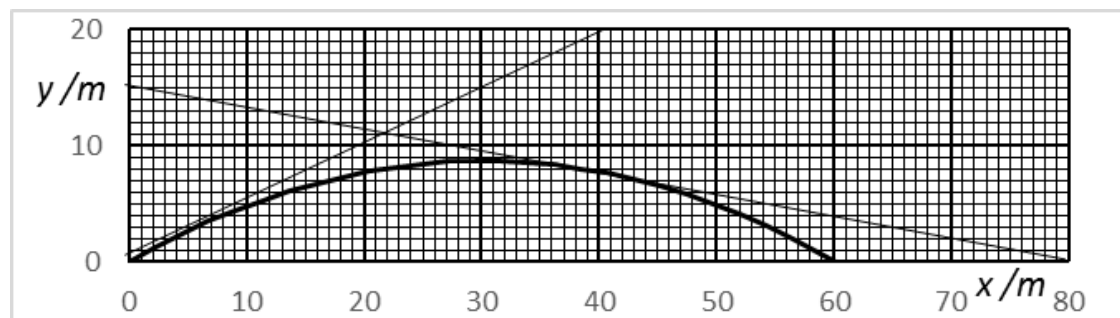
e) Z rovníc (3) a (4) vylúčime parameter  $t$  tak, že z (3) čas vyjadríme a dosadíme do (4)

$$y = \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right) v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2.$$

S použitím (5) a (6) funkciu upravíme napr. na tvar, ktorý obsahuje iba namerané hodnoty

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g t_D^2}{(D-d)^2} [x^2 - (D-d)x]. \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty je graf trajektórie na obr. RC-7.



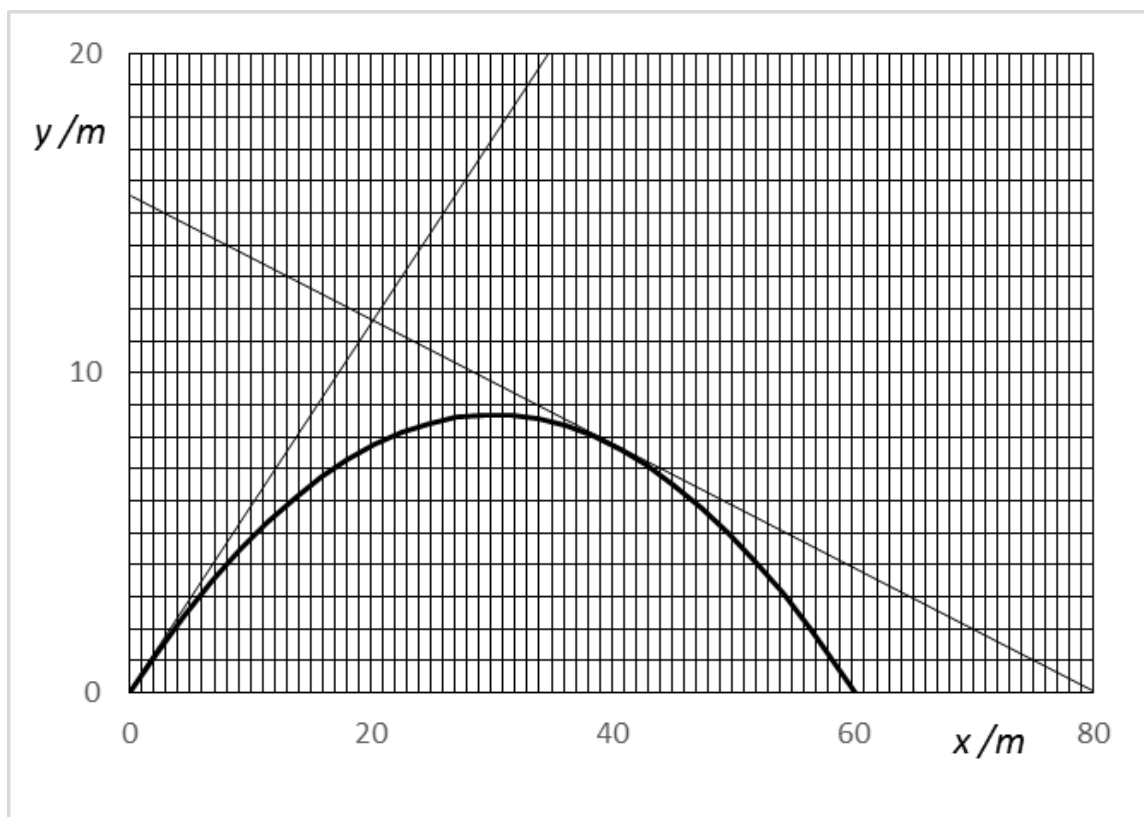
Obr. RC-7

0,5 b



Ak použijeme na oboch osiach rovnakú mierku, môžeme v grafe priamo merať uhly, napr.  $\alpha$  a  $\varphi$  uhlomerom. Vidíme však, že v takomto grafe je meranie najmä malých uhlov dosť nepresné (obr. RC–7).

Je preto výhodnejšie zvoliť jemnejšiu mierku na osi  $y$ , obr. RC–8.



Obr. RC–8

0,5 b

V tomto grafe sa však uhly nezobrazujú v ich reálnej veľkosti a je ich potrebné určovať zo smerníc jednotlivých priamok.

Pre priamku začiatočnej rýchlosti určíme z grafu pre  $y = 20$  m  $x \approx 35$  m. Smernica je potom  $\tan \alpha \approx 20/35$ , odkiaľ  $\alpha \approx 30^\circ$ . 0,5 b

Pre priamku pozorovateľa je úsek na osi  $y$  15,5 m a vodorovný priemet na osi  $x$  80 m. Smernica je  $\tan \varphi \approx 15,5/80$ , odkiaľ  $\varphi \approx 11^\circ$ . 0,5 b

Z grafu ďalej určíme maximálnu výšku  $h \approx 8,7$  m. 0,5 b

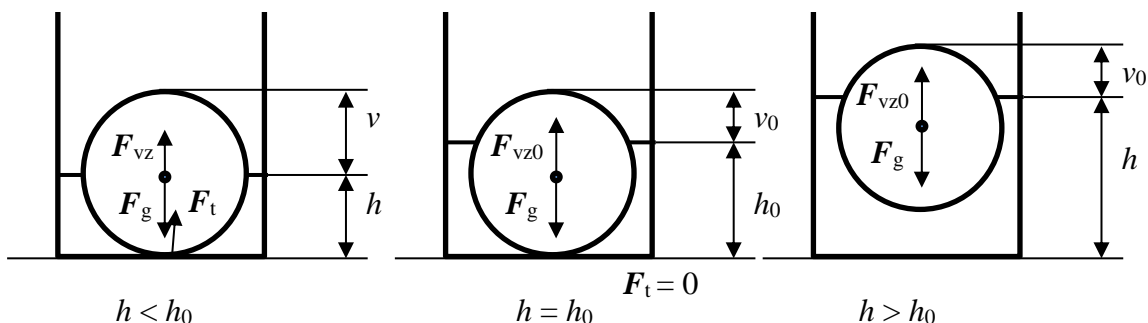
Zo vzťahov (8), (13) a (9) vypočítame hodnoty  $\alpha \approx 30,0^\circ$ ;  $\varphi \approx 10,9^\circ$ ,  $h \approx 8,67$  m.

Z porovnania vidíme, že pri starostlivej konštrukcii získame z grafu veľmi presné výsledky, ktoré sa veľmi dobre zhodujú s výsledkami získanými teoretickým riešením matematického modelu. 0,5 b

#### 4. Plávajúca guľa

Riešenie:

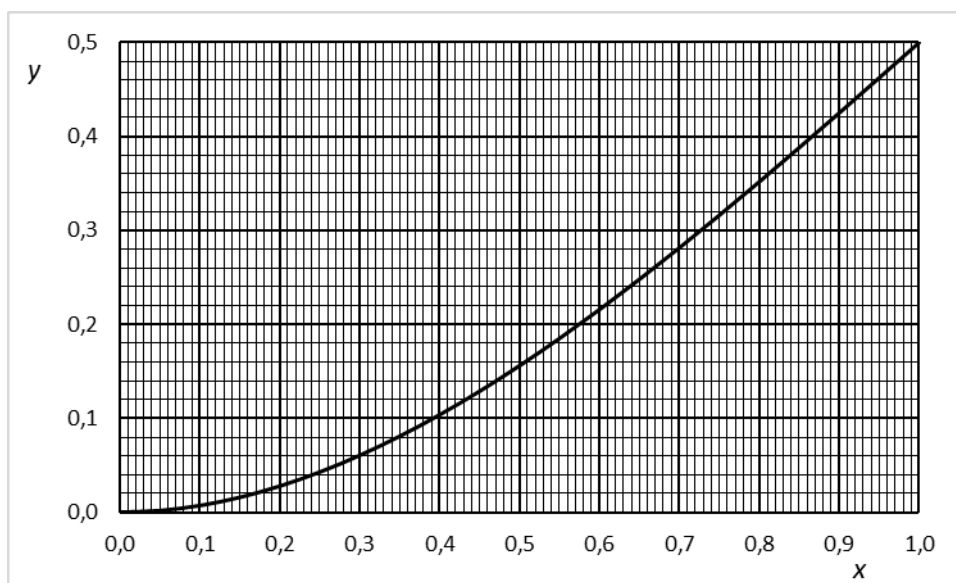
a) Obrázok RC-9



Obr. RC-9

Ak  $h < h_0$ , je vztlaková sila menšia ako tiažová sila  $F_{vz} < F_g$ , a teda veľkosť tlakovej sily dna  $F_t > 0$ . Pre  $h = h_0$  klesne  $F_t$  na nulovú hodnotu, guľa sa dotýka dna a  $F_{vz0} = F_g$ . Pre  $h > h_0$  je guľa plávajúca,  $F_{vz0} = F_g$  a výška odseku zostáva  $v_0$ . 2 b

b) Graf



Obr. RC-10

2 b

c) Ak je tlaková sila na dno nulová, je veľkosť  $F_{vz}$  vztlakovej sily, ktorou pôsobí voda na guľu rovná veľkosti  $F_g$  tiažovej sily pôsobiacej na guľu (Archimedov zákon), obr. RC-9.

$$V_G \rho_G g = V_p \rho_V g,$$

kde  $V_p$  je objem ponorenej časti gule.

$$V_p = V_G - V_{od} = V_G \left( 1 - \frac{V_{od}}{V_G} \right) = V_G (1 - y) = V_G \frac{\rho_G}{\rho_V},$$

odkiaľ

$$y_1 = 1 - \frac{\rho_G}{\rho_V}, \text{ pre dané hodnoty } y_1 = 0,10.$$

Z grafu určíme zodpovedajúcu hodnotu  $x_1 = \frac{v_1}{r} \approx 0,39$ .

Odtiaľ  $h_1 = r(2 - x_1) = 1,88 \times r$

Objem vody

$$V_V = \pi R^2 h_1 - V_{p1} = (2 - x_1) \pi r R^2 - \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{\rho_G}{\rho_V}. \quad (1)$$

Pre dané hodnoty  $h_1 \approx 72,4 \text{ mm}$ ,  $V_V \approx 225 \text{ cm}^3$ .

3 b

d) Obrázok RC-11

Guľa pláva čiastočne vo vode, čiastočne v oleji.

Objem oleja

$$V_O = \pi R^2 v_2 - V_{od2} \quad (2)$$

a súčasne

$$V_O = \pi R^2 (h_2 + v_2) - V_G - 2V_V \quad (3).$$

Vztlková sila má dve zložky, vztlak vody a vztlak oleja. Podľa Archimedovho zákona je vztlková sila rovná tiaži kvapaliny vytlačenej ponorenou časťou telesa, a teda vztlková sila vody

$$F_{vz1} = \rho_V (V_G - V_{od2}) g = \rho_V V_G [1 - y_2] g \quad (4)$$

a vztlková sila oleja

$$F_{vz2} = \rho_O V_{od2} g = \rho_O V_G y_2 g. \quad (5)$$

Súčet obidvoch síl je v rovnováhe s tiažovou silou

$$F_g = \rho_G V_G g = \rho_V V_G [1 - y_2] g + \rho_O V_G y_2 g. \quad (6)$$

Z rovnice (6) určíme relatívny objem odseku

$$y_2 = \frac{\rho_V - \rho_G}{\rho_V - \rho_O} = \frac{1 - \frac{\rho_G}{\rho_V}}{1 - \frac{\rho_O}{\rho_V} \frac{\rho_G}{\rho_V}}. \text{ Pre dané hodnoty } y_2 \approx 0,069.$$

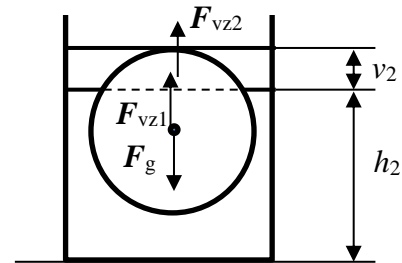
K tejto hodnote nájdeme v grafe hodnotu  $x_2 \approx 0,32$ .

Odtiaľ máme  $v_2 = x_2 r$  a podľa (2)

$$V_O = \pi R^2 r x_2 - \frac{4}{3} \pi r^3 y_2. \text{ Pre dané hodnoty } V_O \approx 86,7 \text{ cm}^3.$$

Z (3) a (1) máme

$$h_2 = 2(2 - x_1) r + \frac{4}{3} \frac{r^3}{R^2} \left( 1 - 2 \frac{\rho_G}{\rho_V} - y_2 \right). \text{ Pre dané hodnoty } h_2 \approx 103 \text{ mm}. \quad 3 \text{ b}$$

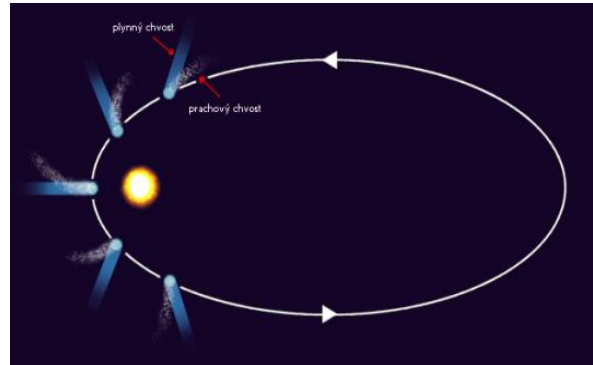


Obr. RC-11

## 5. Kométa Hale–Bopp

Riešenie:

- a) Zo Slnka vychádza tok častíc a žiarenia, tzv. *slnečný vietor*. Ten pôsobí na drobné častice, ktoré sa v blízkosti Slnka nachádzajú. Pri priblížení k Slnku sa zvyšuje teplota kométy a uvoľňujú sa z nej plyny a drobné prachové častice. Slnečný vietor pôsobí na častice tlakovou silou, ktorá je priamoúmerná ploche ich prierezu, a teda druhej mocnине ich polomeru  $r^2$ . Tlaková sila udeľuje časticiam zrýchlenie v smere od Slnka, nepriamoúmerne ich hmotnosti ( $a = F/m$ ). Hmotnosť guľových častíc je však priamoúmerná tretej mocnине  $r^3$  ich polomeru. Teda zrýchlenie  $a$  častíc  $a = \frac{F}{m} \sim \frac{r^2}{r^3} \sim \frac{1}{r}$  je nepriamoúmerné polomeru  $\sim 1/r$ . Znamená to, že slnečný vietor má podstatne väčší účinok na častice s malým polomerom (molekuly plynu  $r \sim 10^{-10}$  m) ako na prachové častice s polomerom  $r \sim 10^{-6} \div 10^{-8}$  m. Plynový chvost smeruje priamo od Slnka, nezávisle, či sa kométa k Slnku približuje alebo sa od neho vzdďaľuje, obr. RC–12. Jeden chvost planéty je tok prachových častíc, druhý je tok plyných častíc. Prachový chvost je odtláčaný od Slnka menej intenzívne ako plynový chvost, preto sa odkláňa od neho v smere proti pohybu kométy.



Obr. RC–12

- b) Teleso v centrálnom gravitačnom poli Slnka sa pohybuje po kužel'osečke (kružnica, elipsa, parabola, hyperbola). Pri pohybe v gravitačnom poli sa zachováva mechanická energia telesa (súčet kinetickej a potenciálnej energie)

$$\frac{1}{2} m v^2 + \left( -G \frac{M m}{r} \right) = \frac{1}{2} m v_1^2 + \left( -G \frac{M m}{r_1} \right). \quad (1)$$

V centrálnom silovom poli sa zachováva moment hybnosti telesa

$$m v r \sin \alpha = m v_1 r_1. \quad (2)$$

Ak je trajektória elipsa, existuje vo vzdialenosti  $r_2$  od Slnka najvzdialenejší bod, v ktorom sa kométa pohybuje kolmo na sprievodič, tzn.  $\alpha = 90^\circ$  rýchlosťou  $v_1$ , pričom

$$v_1^2 = 2GM \frac{r_2}{r_1 (r_2 + r_1)} = \frac{2GM}{r_1} \frac{r_2}{r_2 + r_1}. \quad (3)$$

Ak  $r_2 \rightarrow \infty$ , kométa unikne z gravitačného poľa Slnka a už sa nevráti. Medzná rýchlosť  $v_{1m}$  sa nazýva *úniková rýchlosť*

$$v_{1m} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}}. \text{ Pre dané hodnoty } v_{1m} \approx 44,06 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

( $r_1 = r_{\min} = 0,914$  AU).

Keďže  $v_1 < v_{1m}$ , kométa je periodická a jej trajektória je veľmi pretiahnutá elipsa.

Zo vzťahu (3) určíme

$$r_2 = \frac{r_1}{\frac{2GM}{r_1 v_1^2} - 1}. \text{ Pre dané hodnoty } r_2 \approx 370 \text{ AU.} \quad 1 \text{ b}$$

Teda ide o periodickú kométu s eliptickou trajektóriou.

*Pozn.: Keďže rozdiel  $v_{1m}$  a  $v_1$  je veľmi malý, je výpočet  $r_2$  veľmi nepresný. Pripúšťa sa ako správny výsledok  $390 \pm 20 \text{ AU}$ .*

Podľa 3. Keplerovho zákona je pomer druhých mocnín obežných dôb  $T$  rovný pomeru tretích mocnín hlavných polosí telies obiehajúcich okolo centrálného telesa s hmotnosťou  $M$  podstatne väčšou ako hmotnosť  $m$  telies obiehajúcich.

Hlavná polos eliptickej trajektórie kométy

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}. \text{ Pre dané hodnoty } a \approx 185 \text{ AU.} \quad 1 \text{ b}$$

Ak použijeme Zem ( $T_Z = 1,00$  rok,  $a_Z = 1,496 \times 10^{11} \text{ m} = 1,00 \text{ AU}$ ) ako porovnávacie teleso, platí

$$\left(\frac{T}{T_Z}\right)^2 = \left(\frac{a}{a_Z}\right)^3, \text{ resp. } T = T_Z \left(\frac{a}{a_Z}\right)^{3/2}. \text{ Pre dané hodnoty } T \approx 2 \text{ 526 rokov.} \quad 2 \text{ b}$$

Ďalší príchod kométy možno očakávať okolo roku 4 500.

### c) Obrázok RC-13

Pre zostrojenie grafu trajektórie použijeme hodnoty hlavnej polosí  $a \approx 185 \text{ AU}$  a vedľajšej polosí  $b = \sqrt{a^2 - (a - r_1)^2} \approx 18,4 \text{ AU}$ .

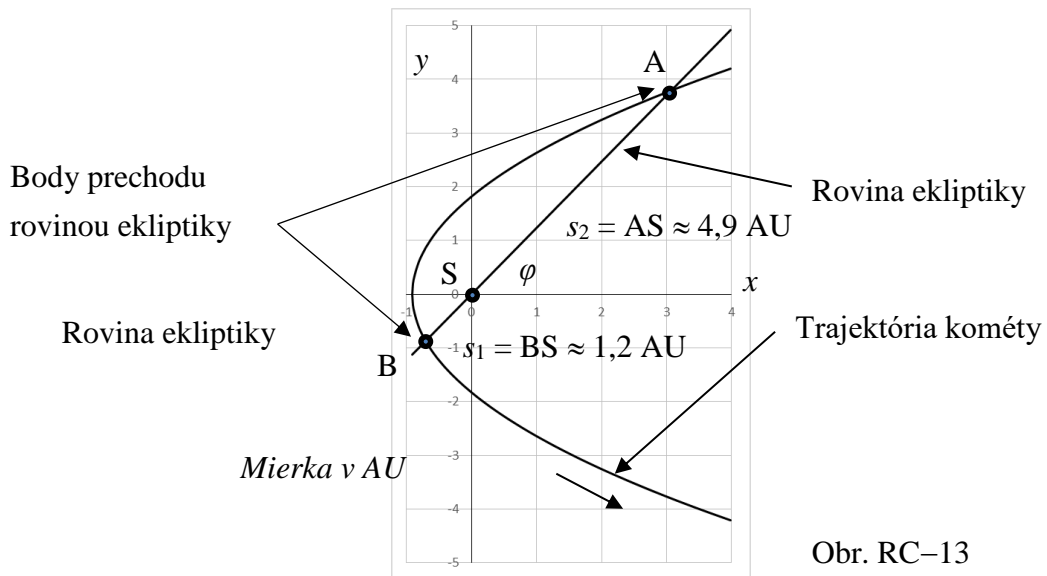
Zostrojíme úsek elipsy (začiatok súradníc posunieme o  $(a - r_1)$  do ohniska – polohy Slnka)

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{(x - a + r_1)^2}{a^2}}.$$

Ekliptika sa javí ako priamka, ktorá zvierá s osou elipsy uhol  $\varphi$ . Rovnica priamky

$$y = k x, \text{ kde } k = \tan \varphi - \text{ ak zvolíme rovnakú mierku na osiach } x \text{ a } y.$$

Graf trajektórie a priemetu ekliptiky je na obr. RC-13.



správny obrázok 2 b

Bod S predstavuje Slnko. Body A a B sú priesečníky trajektórie kométy a roviny ekliptiky. Z grafu určíme hodnoty  $s_1 = AS \approx 4,9 \text{ AU}$  a  $s_2 = BS \approx 1,2 \text{ AU}$ . 2 b

Bod A sa nachádza v blízkosti orbity Jupitera ( $r_J \approx 5,20 \text{ AU}$ ), bod B sa nachádza medzi orbitami Zeme a Marsu ( $r_Z = 1 \text{ AU}$ ,  $r_M \approx 1,52 \text{ AU}$ ).

Ako vidno k stretnutiu kométy so Zemou veľa nechýbalo – našťastie v čase prechodu kométy bodom B sa Zem nachádzala na druhej strane orbity, tzn. k bezprostrednému priblíženiu nedošlo.

## 5. Pyramída v Astane

Riešenie:

- a) Ak sa mení teplota rovnomerne v celej konštrukcii, menia sa všetky rozmery konštrukcie lineárne s teplotou. Ako vidno na obrázku, dĺžka spádovej úsečky ihlanu pyramídy

$$v_o = \frac{1}{5} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}, \text{ pre dané hodnoty } v_o \approx 14 \text{ m.}$$

sa delí na päť výšok trojuholníkových segmentov,  $v_o$  je výška segmentu pri teplote  $t_0$ .

Trojuholníková sklenená doska dosadá na dolný okraj oceľového rámu. Pri teplote  $t_1$  sú výšky skla i rámu rovnaké. Keďže  $\alpha_1 > \alpha_2$ , pri zvyšovaní teploty vzniká medzi horným okrajom skla a rámom medzera, ktorá pri teplote  $t_2$  má veľkosť

$$c_1 = v_o [1 + \alpha_1 (t_1 - t_0)] (\alpha_1 - \alpha_2) (t_2 - t_1). \text{ Pre dané hodnoty } c_1 \approx 4,5 \text{ mm.} \quad 2 \text{ b}$$

- b) Rozdiel hodnôt výšky pyramídy

$$\Delta h = h \alpha_1 (t_2 - t_1). \text{ Pre dané hodnoty } \Delta h \approx 6,4 \text{ cm.} \quad 2 \text{ b}$$

- c) Dĺžka uhlopriečky podstavy pyramídy

$$u = \sqrt{a^2 + a^2} = a \sqrt{2}.$$

Keďže betónová doska so zmenou teploty tiež mení svoje rozmery, je rozsah posunutia vrcholu vzhľadom na dosku

$$c_2 = u (\alpha_1 - \alpha_3) (t_2 - t_1). \text{ Pre dané hodnoty veličín } c_2 \approx 2,1 \text{ cm.} \quad 3 \text{ b}$$

- d) Ak sa mení teplota, menil by sa rozmer ocele a betónu rôzne. Keďže sú konce nosníka pevne pripevnené k betónovej doske, vzniká v betóne i v oceli mechanické napätie. Sily pôsobiace na oceľ i betón majú rovnakú veľkosť a opačný smer. Keďže obsah prierezu betónovej dosky  $S_b \gg S_o$ , je mechanické napätie  $\sigma_b = F/S_b$  veľmi malé v porovnaní s mechanickým napätím v oceli  $\sigma_o = F/S_o$ . Ťahovú/tlakovú relatívnu deformáciu betónu  $\epsilon_b$  preto možno zanedbať v porovnaní s tlakovou/ťahovou relatívnou deformáciou ocele  $\epsilon_o$ . Keďže oceľový nosník sa nemôže predĺžiť/skrátiť voči betónu pri zmene teploty, je teplotná zmena dĺžky  $\Delta a$  voči betónu kompenzovaná tlakovou zmenou dĺžky opačného smeru. Dochádza tak k relatívnej mechanickej deformácii  $-\Delta a / a$ , ktorá spôsobuje vznik mechanického napätia

$$\sigma_o = \frac{F}{S_o} = -E \frac{\Delta a}{a},$$

odkiaľ vyjadríme silu  $F$ , ktorou pôsobí nosník na uchytenie v betóne

$$F = -S_o E \frac{\Delta a}{a} = -S_o E (\alpha_1 - \alpha_3) (t - t_0).$$

Pri vyššej teplote  $t_2 > t_0$  pôsobí nosník na betónové uchytenie tlakovou silou s veľkosťou

$$F_2 = S_o E (\alpha_1 - \alpha_3) (t_2 - t_0),$$

pri nižšej teplote  $t_1 < t_0$  ide o silu ťahovú s veľkosťou

$$F_1 = -S_o E (\alpha_1 - \alpha_3) (t_1 - t_0).$$

Pre dané hodnoty veličín  $F_1 = F_2 = 2,4 \text{ MN}$ ,

2 b

čo zodpovedá pri obsahu kontaktnej plochy  $S_o$  nosníka a betónu mechanickému napätiu c tlaku  $\sigma = F/S_o$ , pre dané hodnoty  $\sigma \approx 24 \text{ MPa}$ . Táto hodnota je veľmi blízka pevnosti betónu

a dochádzalo by k jeho postupnej degradácii v okolí hlavice nosníka. Oceľ má pevnosť o jeden rád väčšiu. 1 b

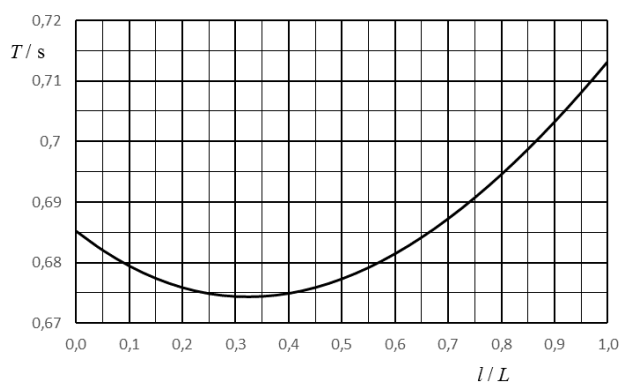
### 7. *Ladenie kyvadla – Experimentálna úloha*

Riešenie:

$$(I + ml^2)\varepsilon = \left( M g \frac{L}{2} + m g l \right) \varphi$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{I + ml^2}{M g \frac{L}{2} + m g l}} = \pi \sqrt{\frac{2I}{M g L}} \sqrt{\frac{1 + \frac{3ml^2}{ML^2}}{1 + \frac{2ml}{ML}}} = T_0 \sqrt{\frac{ML^2 + 3ml^2}{L(ML + 2ml)}}$$

Pre  $M = 200 \text{ g}$ ,  $m = 20 \text{ g}$ ,  $L = 70 \text{ cm}$ ,  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  je  $T_0 \approx 0,685 \text{ s}$




---

### 58. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie C

Autori úloh: Ivo Čáp (1, 3, 5, 7), Ľubomír Konrád (2), Kamil Bystrický (4),  
Dušan Nemeč (6)

Recenzia a úprava: Daniel Klvanec, Ľubomír Mucha

Preklad do maďarského jazyka: Aba Teleki

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017



