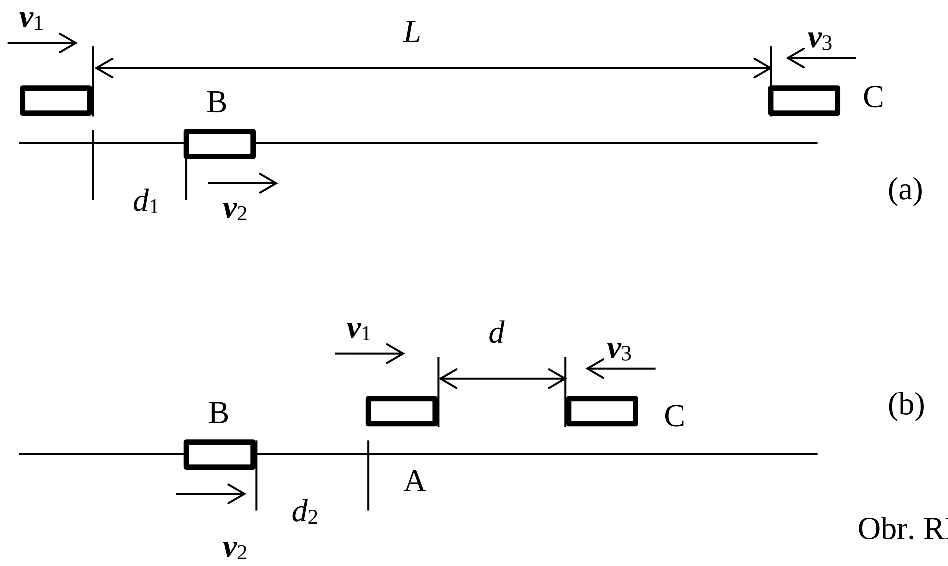
58. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2016/2017

Kategória D – domáce kolo
Riešenie úloh

1. Predchádzanie vozidiel

Riešenie:

a)



Obr. RD–1

2 b

Poloha vozidiel na začiatku predbiehania je znázornená na obr. RD–1 (a) a na konci na obr. RD–1 (b).

Možností riešenia je niekoľko, najmä vzhľadom na zvolenú vzťažnú sústavu.

Uvažujme napr. vzťažnú sústavu spojenú s vozidlom B. Vozidlo A sa v tejto sústave pohybuje rýchlosťou $v_1 - v_2$ a vozidlo C v opačnom smere rýchlosťou $v_3 + v_2$. Vozidlo A pri predbiehaní musí prejsť vzdialenosť $d_1 + d_\mathrm{A} + d_\mathrm{B} + d_2$ za dobu

$$t_1 = \frac{d_1 + d_2 + d_\mathrm{A} + d_\mathrm{B}}{v_1 - v_2}.$$

Za tento čas sa zmenší vzdialenosť medzi vozidlami A a C na

$$d = L_1 - (d_1 + d_2 + d_\mathrm{A} + d_\mathrm{B}) - (v_1 + v_3)t_1 = L - \left(1 + \frac{v_1 + v_3}{v_1 - v_2}\right)(d_1 + d_2 + d_\mathrm{A} + d_\mathrm{B}).$$

Pre dané hodnoty $d \approx 173$ m, čo je bezpečná vzdialenosť pre zaradenie vozidla A pred vozidlo B. 2 b

Pozn.: Pre L_2 = 700 m by došlo ku kolízii ($d \approx -126$ m).

b) Vozidlo A prešlo rýchlosťou $v_1 - v_2$ vzdialenosť $d_1 + d_\mathrm{B}$ za dobu

$$t_2 = \frac{d_1 + d_\mathrm{B}}{v_1 - v_2}$$. Pre dané hodnoty $t_2 \approx 8{,}64$ s

Potom pokračovalo rovnomerne spomaleným pohybom ($a_1 < 0$) nazad do vzdialenosti d_B

$$-d_\mathrm{B} = (v_1 - v_2)\,t_3 + \frac{1}{2}\,a_1\,t_3^2 .$$

Ide o kvadratickú rovnicu pre čas t_3

$$t_3^2 + 2\,\frac{v_1 - v_2}{a_1}\,t_3 + \frac{2\,d_\mathrm{B}}{a_1} = 0 ,$$

ktorá má riešenie

$$t_3 = -\frac{v_1 - v_2}{a_1} \pm \sqrt{\left(\frac{v_1 - v_2}{a_1}\right)^2 - \frac{2\,d_\mathrm{B}}{a_1}}$$, pre $t_3 > 0$ má význam iba znamienko +.

Pre dané hodnoty $t_3 \approx 2{,}27$ s. 1 b

Po ukončení tohto manévru je vzdialenosť medzi vozidlami A a C (v sústave spojenej s vozidlom B)

$d = L_2 - d_1 - (v_3 + v_2)(t_2 + t_3)$. Pre dané hodnoty $d \approx 165$ m. 1 b

Tento spôsob riešenia kritickej situácie sa ukazuje ako bezpečný. 1 b

c) Po dobu t_2 sa vozidlo A pohybovalo až na úroveň vozidla B. Nasledoval rovnomerne zrýchlený pohyb na dráhe $d_2 + d_\mathrm{A}$ po dobu t_4 pre bezpečné zaradenie pred vozidlo B

$$d_2 + d_\mathrm{A} = (v_1 - v_2)t_4 + \frac{1}{2}a_2\,t_4^2 .$$

Kvadratickú rovnicu upravíme do základného tvaru

$$t_4^2 + 2\left(\frac{v_1 - v_2}{a_2}\right)t_4 - \frac{2(d_2 + d_\mathrm{A})}{a_2} = 0 .$$

Riešenie rovnice

$$t_4 = -\frac{v_1 - v_2}{a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{v_1 - v_2}{a_2}\right)^2 + \frac{2(d_2 + d_\mathrm{A})}{a_2}}$$. Keďže $t_4 > 0$ má význam znamienko +.

Pre dané hodnoty $t_4 \approx 3{,}57$ s. 1 b

V čase dokončenia bezpečného zaradenia pred vozidlo B je vzdialenosť vozidiel A a C

$$d = L_2 - (d_1 + d_2 + d_\mathrm{A} + d_\mathrm{B}) - (v_3 + v_2)(t_2 + t_4).$$

Pre dané hodnoty $d \approx 79{,}9$ m. 1 b

Maximálna rýchlosť

$v_\mathrm{m} = v_1 + a_2\,t_4$. Pre dané hodnoty $v_\mathrm{m} \approx 30{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \approx 109\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. 1 b

Ako vidno, tento spôsob predbiehania je nebezpečný, navyše s prekročením povolenej rýchlosti.

Pozn.: Z výsledkov vidno, aký dôležitý je správny odhad vzdialenosti protiidúceho vozidla. Pre bezpečné predbiehanie je v našom prípade potrebná vzdialenosť protiidúceho vozidla najmenej 1 km. Pri krízovej situácii sa ukázalo výhodnejšie predbiehanie prerušiť a vrátiť sa za pomalšie vozidlo.

2. Pokusy s mincami

Riešenie:

a) Na dvojicu mincí pôsobia vonkajšie sily trenia, tiaže a tlakovej sily podložky. Posledné dve sa navzájom kompenzujú (výslednica je nulová). Zmena celkovej hybnosti $\Delta \boldsymbol{p}$ je rovná impulzu vonkajších síl ($I = F\,\Delta t$). Keďže čas zrážky je veľmi malý, možno impulz vonkajšej sily počas zrážky zanedbať a teda $\Delta \boldsymbol{p} = 0$, čo predstavuje *zákon zachovania hybnosti*

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \; . \qquad (1) \qquad 0{,}5 \text{ b}$$

Keďže je posunutie mincí počas zrážky veľmi malé, je možné zanedbať prácu síl trenia počas zrážky a teda kinetická energia sústavy sa nemení, čo predstavuje *zákon zachovania mechanickej energie*

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 . \qquad (2) \qquad 0{,}5 \text{ b}$$

Rýchlosti v_1, v_2 určíme riešením sústavy rovníc (1) a (2). Rovnice (1), (2) upravíme na tvar

$$m_1 (v_0 - v_1) = m_2 v_2 , \qquad (3)$$

$$m_1 (v_0^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2 . \qquad (4)$$

Podielom rovníc (4) a (3), máme

$$v_0 + v_1 = v_2 . \qquad (5)$$

Riešením sústavy lineárnych rovníc (3) a (5) dostávame rýchlosti v_1 a v_2, pričom smer vektorov $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$ je daný smerom vektora $\boldsymbol{v}_0$

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_0 \frac{2 m_1}{m_2 + m_1} . \qquad (6) \qquad 1 \text{ b}$$

Druhá minca po zrážke sa vždy pohybuje v smere vektora $\boldsymbol{v}_0$. Prvá minca sa pohybuje v smere $\boldsymbol{v}_0$ ak $m_1 > m_2$. Ak $m_1 < m_2$, prvá minca sa odrazí smerom nazad $-\boldsymbol{v}_0$. Ak $m_1 = m_2$, prvá minca zostane po zrážke stáť v mieste zrážky a druhá minca postupuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}_0$ (prvá minca odovzdá svoju hybnosť a kinetickú energiu druhej minci).

b) Zrážkou nadobudnú mince rýchlosti v_1 a v_2, ktoré predstavujú začiatočné rýchlosti ich pohybu po povrchu stola. Ich pohyb je však brzdený trením, pričom trecia sila $F_t = -f\,m\,g$. Zrýchlenie pohybu $a = F_t / m = -f\,g$ nezávisí od hmotnosti mince. Čas do zastavenia prvej mince (t_1) a druhej mince (t_2)

$$t_1 = \frac{v_1}{\pm a} \quad \text{a} \quad t_2 = \frac{v_2}{a} .$$

Znamienko (–) pre $m_1 > m_2$, znamienko (+) platí pre $m_1 < m_2$.

Doba medzi okamihmi zastavenia oboch mincí

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{v_1 - v_2}{f\,g} = \frac{v_0}{f\,g}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} - \frac{2m_1}{m_2 + m_1}\right) = -\frac{v_0}{f\,g} \quad \text{pre } m_1 > m_2$$ 0,5 b

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{v_1}{-f\,g} - \frac{v_2}{f\,g} = \frac{v_0}{f\,g}\left(-\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} - \frac{2m_1}{m_2 + m_1}\right) = \frac{v_0}{f\,g}\,\frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2} \quad \text{pre } m_1 < m_2.$$

0,5 b

Znamienko výslednej hodnoty udáva, ktorá z mincí zastaví neskôr.

Z miesta zrážky prekoná minca dráhu rovnomerne spomaleného pohybu $s = \frac{v^2}{2\,f\,g}$.

Pre $m_1 > m_2$ sa mince pohybujú rovnakým smerom

$$d = \frac{v_2^2}{f\,g} - \frac{v_1^2}{f\,g} = \frac{v_0^2}{f\,g}\left[\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\right] = \frac{v_0^2}{f\,g}\,\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$ 0,5 b

Pre $m_1 < m_2$ sa mince pohybujú opačným smerom

$$d = \frac{v_2^2}{f\,g} + \frac{v_1^2}{f\,g} = \frac{v_0^2}{f\,g}\left[\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\right] = \frac{v_0^2}{f\,g}\,\frac{4m_1^2 + (m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2}.$$ 0,5 b

c) Číselné hodnoty ...

m_1 / g	m_2 / g	v_1/ m·s^{-1}	v_2/ m·s^{-1}	Δt/s	d/m
8,50	7,50	0,0312	0,531	-1,28	0,717
7,50	7,50	0	0,500	-1,28	0,637
7,50	5,74	0,0665	0,566	-1,28	0,806

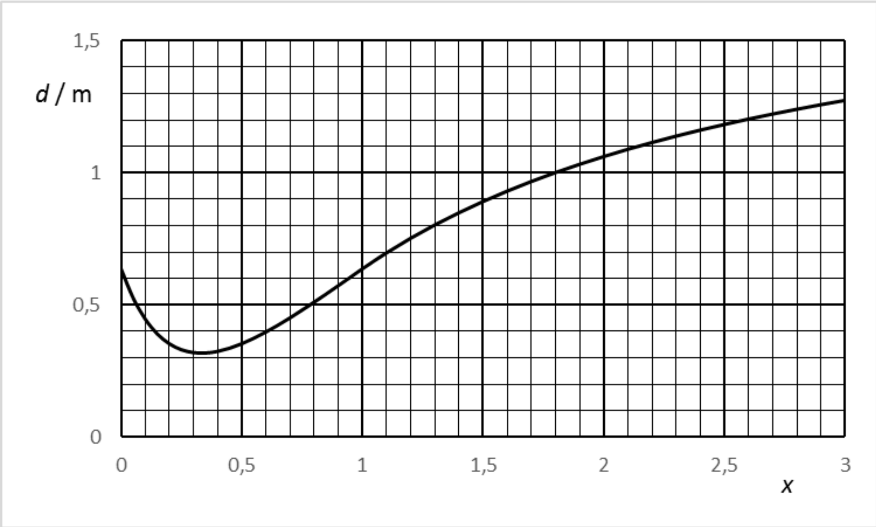
1 b

d) Vzdialenosť d ako funkcia x má tvar

$$d = \frac{v_0^2}{f\,g}\,\frac{3x - 1}{x + 1} \quad \text{pre } x > 1$$ 0,5 b

$$d = \frac{v_0^2}{f\,g}\,\frac{4x^2 + (1 - x)^2}{(x + 1)^2} \quad \text{pre } x < 1$$ 0,5 b

Graf



Obr. RD–2 1 b

Z grafu vidno, že vzdialenosť d nadobudne

minimálnu hodnotu $d_{\min} \approx 32$ cm pre $x_{\min} \approx 0{,}33$ a hodnotu $d_0 \approx 64$ cm pre $x \to 0$. 1 b

Pre $x_1 = 1$ je $d_1 = d_0$.

Pre $x > 1$ funkcia rastie.

Pre $x \to \infty$ vzdialenosť d rastie k maximálnej hodnote $d_{\max} = 5\, d_0$. 1 b

e) Mince zastanú súčasne ($\Delta t = 0$), ak $m_2 = 3\, m_1$, tzn. $x = 1/3$.

V tomto prípade

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0\ , \qquad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0\ .$$ 0,5 b

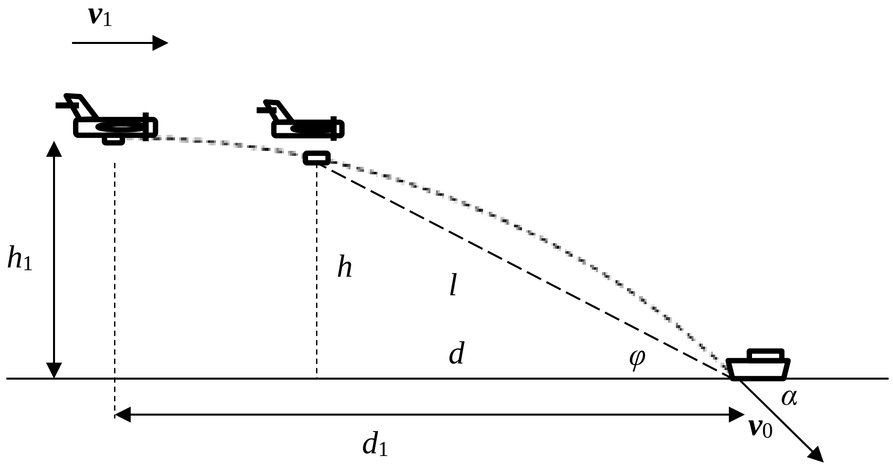
Vzdialenosť $d = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{f\,g} = \frac{1}{2}d_0$, čo zodpovedá minimálnej hodnote $d_{\min}$. 0,5 b

Pomer $x = 1/3$ sa nedá realizovať pomocou euromincí.

3. *Letecká pomoc*

Riešenie:

a) Obrázok



Obr. RD–3

2 b

b) Ak v obrázku označíme vodorovnú vzdialenosť d_1 lietadla od lode v okamihu uvoľnenia kontajnera, výšku h a vodorovnú vzdialenosť d kontajnera vo všeobecnej polohe, v sústave spojenej s loďou platí

$d = d_1 - v_1 t$, (1) $h = h_1 - \frac{1}{2} g t^2$, (2) 0,5 + 0,5 b

$v_x = v_1$, (3) $v_y = g t$. (4) 0,5 + 0,5 b

c) Vodorovná zložka rýchlosti kontajneru je rovná rýchlosti lietadla. Za čas t_0 preletí kontajner vodorovnú vzdialenosť $l \cos\varphi$ k lodi

$$v_1 t_0 = l \cos\varphi \ ,$$

odkiaľ máme rýchlosť letu lietadla

$v_1 = \dfrac{l \cos\varphi}{t_0}$. Pre dané hodnoty $v_1 \approx 56{,}3$ m/s ≈ 203 km/h. (5) 2b

V čase t_1, keď posádka spozoruje kontajner, súradnice kontajneru sú

$d_2 = d_1 - v_1 t_1 = l \cos\varphi$ (6) $h_2 = h_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = l \sin\varphi$, (7)

v okamihu dopadu na hladinu

$d_3 = d_1 - v_1 (t_1 + t_0) = 0$ (8) $h_3 = h_1 - \frac{1}{2} g (t_1 + t_0)^2 = 0$. (9)

Z rozdielu rovníc (7) a (8) máme

$$(t_1 + t_0)^2 - t_1^2 = 2 t_1 t_0 + t_0^2 = \frac{2l}{g} \sin\varphi ,$$

odkiaľ

$$t_1 = \frac{l}{g\,t_0}\sin\varphi - \frac{t_0}{2}. \quad (\approx 1{,}42\ \text{s})$$

Výška letu lietadla

$$h_1 = l\sin\varphi + \frac{1}{2} g\,t_1^2 = l\sin\varphi + \frac{1}{2}\,g\left(\frac{l\sin\varphi}{g\,t_0} - \frac{t_0}{2}\right)^2. \qquad 2\ \text{b}$$

Pre dané hodnoty $h_1 \approx 331$ m.

d) Za čas pádu $t_1 + t_0$ získa zvislá zložka rýchlosti kontajneru veľkosť

$$v_y = g\left(t_1 + t_0\right) = \frac{1}{2} g\,t_0 + \frac{l\sin\varphi}{t_0}.$$

Veľkosť rýchlosti dopadu

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{l\cos\varphi}{t_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g\,t_0 + \frac{l\sin\varphi}{t_0}\right)^2}.$$

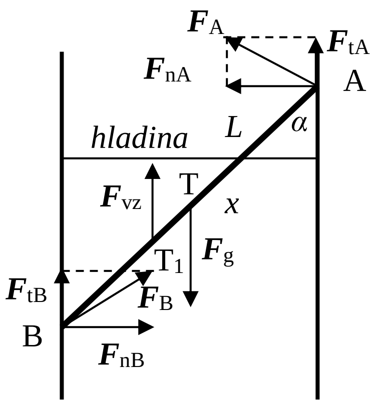
Pre dané hodnoty $v_0 \approx 98{,}3$ m/s ≈ 354 km/h. 2 b

4. *Drevená tyč v rúre*

Riešenie:

a) Obr. RD–4.

Na tyč pôsobí smerom zvislo nadol tiažová sila $\boldsymbol{F}_\text{g} = m\,\boldsymbol{g} = S\,L\,\rho\,\boldsymbol{g}$ v strede T tyče, smerom nahor vztlaková sila vody $\boldsymbol{F}_\text{vz} = -S\,x\,\rho_\text{V}\,\boldsymbol{g}$ v strede T_1 ponorenej časti tyče, sila $\boldsymbol{F}_\text{A}$ v bode A dotyku tyče s rúrou, ktorá má zvislú zložku $\boldsymbol{F}_\text{tA}$ (sila trenia) a zložku $\boldsymbol{F}_\text{nA}$ kolmú na stenu rúry, podobne sila $\boldsymbol{F}_\text{B}$ v bode dotyku B. Označili sme S obsah prierezu tyče, ρ hustotu dreva a ρ_V hustotu vody. 1 b



Obr. RD–4 1 b

Označíme uhol α medzi tyčou a zvislým smerom, pričom

$$\sin\alpha = \frac{2R}{L} \quad \text{alebo} \quad \tan\alpha = \frac{2R}{\sqrt{L^2 - (2R)^2}}.$$

b) Pre tyč platia podmienky rovnováhy síl v zvislom smere a smere kolmom na rúru

$$F_\text{g} - F_\text{vz} - F_\text{tA} - F_\text{tB} = 0 \qquad (1) \qquad 1\ \text{b}$$

$$F_\text{nB} - F_\text{nA} = 0 \qquad (2) \qquad 1\ \text{b}$$

a rovnováhy momentov síl, napr. vzhľadom na bod A,

$$F_\text{vz}\,\frac{x}{2}\sin\alpha - F_\text{g}\,\frac{L}{2}\sin\alpha + F_\text{tA}\,L\sin\alpha + F_\text{nA}\,L\cos\alpha = 0. \qquad (3) \qquad 1\ \text{b}$$

Keďže tri rovnice (1) až (3) obsahujú päť neznámych veličín F_{tA}, F_{tB}, F_{nA}, F_{nB} a x, treba pre riešenie definovať ďalšie dve podmienky. *Pozn.: Statický prípad nemá jednoznačné riešenie a v dôsledku statického trenia existuje viacero možností ponorenia tyče.* 1 b

c) Ak predpokladáme, že sa tyč pomaly posúva, je trenie $\boldsymbol{F}_{tA}$ a $\boldsymbol{F}_{tB}$ v bodoch dotyku A a B kĺzavé, opísané jednoznačnými vzťahmi (dve doplnkové podmienky) 1 b

$$F_{tA} = f F_{nA} \quad \text{a} \quad F_{tB} = f F_{nB}. \tag{4}$$

Z rovníc (3) a (4) máme

$$F_{nA} = F_{nB} = F_n \qquad \text{a} \qquad F_{tA} = F_{tB} = F_t. \tag{5}$$

Z (1) a (4) potom máme

$$F_t = \frac{1}{2}\left(F_g - F_{vz}\right) \qquad \text{a} \qquad F_n = \frac{1}{2f}\left(F_g - F_{vz}\right). \tag{6}$$

Dosadením do (3) dostávame

$$F_{vz}\frac{x}{2} - F_g\frac{L}{2} + \frac{1}{2}\left(F_g - F_{vz}\right)L + \frac{1}{2f\tan\alpha}\left(F_g - F_{vz}\right)L = 0$$

a po dosadení za sily F_g a F_{vz} a úprave dostávame kvadratickú rovnicu pre x, resp. x/L,

$$\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)\left(1 + \frac{1}{f\tan\alpha}\right) + \frac{1}{f\tan\alpha}\frac{\rho}{\rho_V} = 0.$$

Riešenie rovnice

$$\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{f\tan\alpha}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{f\tan\alpha}\right)^2 - \frac{1}{f\tan\alpha}\frac{\rho}{\rho_V}}.$$

Keďže $x/L \leq 1$, fyzikálny zmysel má iba znamienko (−)

$$\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{f\tan\alpha}\right)\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_V}\frac{4f\tan\alpha}{\left(1 + f\tan\alpha\right)^2}}\right]. \tag{7}$$

1 b

Pre dané hodnoty $x/L \approx 0{,}40$.

d) Ak by mala tyč takmer zvislý smer, tzn. $\alpha \to 0$, a teda $\sin\alpha \to 0$ a $\cos\alpha \approx 1$, máme z (3)

$$F_n \to 0,\ F_t \to 0$$

a z (1)

$F_g = F_{vz}$, a teda $\dfrac{x}{L} = \dfrac{\rho}{\rho_V}$. Pre dané hodnoty $x/L = 0{,}47$. 1 b

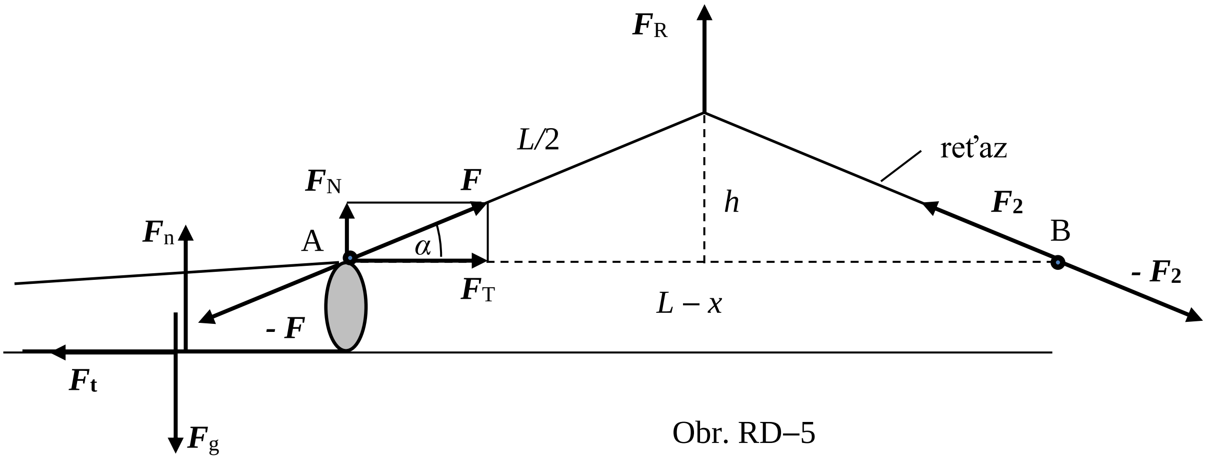
Výsledok možno získať aj ako limitu výrazu (7) pre $\alpha \to 0$.

Keď je tyč šikmá, tlačí na steny rúry a v bodoch dotyku pôsobia sily trenia, ktoré spolu so vztlakovou silou odľahčujú tyč. Preto je pomer x/L v tomto prípade menší. Ak je tyč zvislá, trenie na stenách nepôsobí, takže sa tyč ponorí hlbšie. 1 b

5. *Ťahanie dreva*

Riešenie:

a) Obrázok



Obr. RD–5

2 b

Na kmeň pôsobia sily tiažová $\boldsymbol{F}_g$ ($F_g = M\,g$), ťahová reťaze $\boldsymbol{F}$ s vodorovnou zložkou $\boldsymbol{F}_T$ a zvislou zložkou $\boldsymbol{F}_N$, tlaková sila podložky $\boldsymbol{F}_n$ a sila trenia $\boldsymbol{F}_t$ ($F_t = f\,F_n$).

Na reťaz pôsobia sily ťahová $-\boldsymbol{F}$ v bode upevnenia kmeňa $-\boldsymbol{F}_2$ v bode upevnenia k traktoru a ťahu robotníka $\boldsymbol{F}_R$. Zo symetrie vyplýva $F = F_2$. 1 b

b) Pohyby sú pomalé a rovnomerné, preto ide o statickú rovnováhu síl.

Pre rovnováhu síl na kmeni

$$F_T = F_t \text{ , resp. } F\cos\alpha = f\left(F_g - F_N\right) = f\left(F_g - F\sin\alpha\right), \qquad (1)$$

kde $\sin\alpha = \dfrac{2h}{L}$ a $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{2h}{L}\right)^2}$.

Z rovnováhy v strede reťaze máme

$$F_R = 2\,F\,\sin\alpha = 2\,F\,\frac{2\,h}{L}\,. \qquad (2)$$

Dosadíme z rovnice (1)

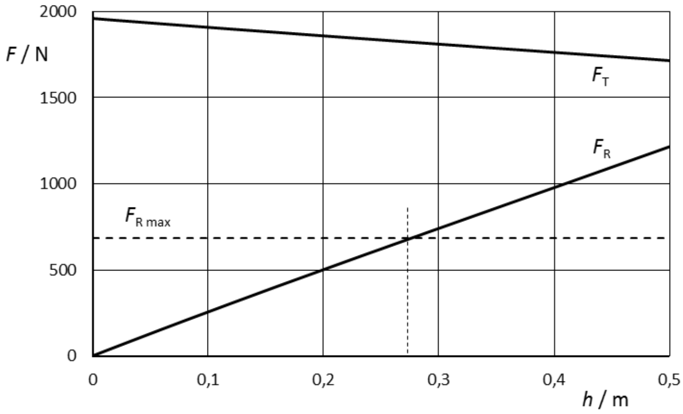
$$F_R = 2\,F\,\sin\alpha = \frac{4h\,f}{\sqrt{L^2-4h^2}+2h\,f}\,M\,g\,, \qquad (3)$$

1 b

$$F_T = F\cos\alpha = \frac{\sqrt{L^2-4h^2}}{\sqrt{L^2-4h^2}+2h\,f}\,f\,M\,g\,. \qquad (4)$$

1 b

Graf F_R a F_T ako funkcie h je na obr. RD–6



Obr. RD–6 2 b

c) Z grafu vidíme, že maximálnej sile robotníka $F_{\mathrm{R\,max}} = m\,g \approx 686$ N zodpovedá výška $h_{\mathrm{m}} \approx 27{,}7$ cm. Tejto výške zodpovedá posunutie kmeňa

$$x_{\mathrm{m}} = L - L\cos\alpha_{\mathrm{m}} = L\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2h_{\mathrm{m}}}{L}\right)^2}\right)$$. Pre dané hodnoty $x_{\mathrm{m}} \approx 5{,}2$ cm.

Toto posunutie kmeň na uvoľnenie reťaze postačuje. 2 b

d) Ako vidno z grafu, je v danom rozsahu závislosť F_{R} od h prakticky lineárna. Prácu potom možno určiť ako súčin strednej hodnoty sily a posunutia

$$W = \frac{F_{\mathrm{m}}}{2} h_{\mathrm{m}} \; .$$

Rovnako možno prácu určiť ako súčin strednej hodnoty sily F_{T} a posunutia x_{m}.

V obidvoch prípadoch máme $W \approx 95$ J. 1 b

Práca zodpovedá približne zodvihnutiu závažia 10 kg do výšky 1 m.

6. *Sacie čerpadlo*

Riešenie:

a) Pri riešení vychádzame z Bernoulliho rovnice pre prúdenie kvapaliny, v ktorej sú zanedbateľne malé straty energie, tzn. neuvažujeme viskozitu ani turbulencie (víry). V celom kvapalnom telese, ktoré sa nachádza v gravitačnom poli, platí v každom jeho bode Bernoulliho rovnica

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konšt} . \qquad (1)$$

V rúrke tlak p klesá s narastajúcou výškou h a taktiež klesá s rastúcou rýchlosťou v prúdenia.

Ak uvažujeme dva body – jeden na hladine vody v studni ($h = 0$), ktorej rýchlosť pohybu v je zanedbateľne malá, a na ktorú pôsobí atmosférický tlak p_a, a druhý bod vo vstupnom otvore čerpadla vo výške h_1, ktorým prúdi voda rýchlosťou v_1, a tlak vody je p_1, podľa Bernoulliho rovnice

$$p_a = p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 ,$$

resp. $$h_1 = \frac{1}{\rho g}\left(p_a - p_1 - \frac{1}{2}\rho v_1^2\right). \qquad (2)$$

Ak je sacia trubica plná vody, tlak postupne klesá smerom nahor. Minimálny tlak $p_1 = 0$. Ak rýchlosť prúdenia vody $v_1 \to 0$, je maximálna teoretická výška h_t vstupu čerpadla nad hladinou vody v studni, pri ktorej môže voda dosiahnuť až k vstupnému otvoru,

$h_t = \dfrac{p_a}{\rho g}$. Pre dané hodnoty $h_t \approx 10$ m. 1 b

b) Ak sa na vstupe čerpadla udržiava tlak $p_1 = 30$ kPa, je výška h_1 daná rovnicou (2). Pre minimálnu hodnotu kinetickej zložky ($v = 0$)

$h_{1\max} = \dfrac{1}{\rho g}\left(p_a - p_1\right)$. Pre dané hodnoty $h_{1\max} \approx 7{,}2$ m. 1 b

b1) Ak $h_1 > h_{1\max}$, čerpadlo nie je schopné nasávať vodu až po vstupný otvor čerpadla. V čerpadle je v tom prípade vzduch a čerpadlo tak pracuje naprázdno, čím sa tlak na jeho vstupe ešte zníži. V tomto prípade nedôjde k čerpaniu vody zo studne.

b2) Ak $h_1 < h_{1\max}$, nasaje čerpadlo vodu až po vstupný otvor a sacou rúrkou prúdi voda, ktorej rýchlosť $v > 0$ je daná rovnicou (1). Čerpadlo čerpá vodu zo studne. 1 b

c) V zadanom prípade $h_1 < h_{1\max}$, tzn. čerpadlo čerpá vodu. Rýchlosť prúdenia vody v sacej trubici je daná rovnicou (2), z ktorej máme

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_a - p_1 - \rho g h_1\right)} . \qquad (3)$$

Pre dané hodnoty $v_1 \approx 4{,}9$ m/s. 2 b

Pri priemere d_1 sacej rúrky je objemový prietok čerpanej vody

$$Q_1 = S_1 v_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_a - p_1 - \rho g h_1\right)} .$$

Pre dané hodnoty $Q_1 \approx 2{,}4\times10^{-3}$ m^3/s = 2,4 l/s. 1 b

d) Použijeme Bernoulliho rovnicu pre bod na výstupe čerpadla s výškou h =0, rýchlosťou prúdenia vody v_2 a tlakom p_2 a bod na výstupe dýzy s výškou h_2, rýchlosťou prúdenia vody v_3 a tlakom p_a (koniec dýzy je otvorený a pôsobí iba atmosférický tlak vzduchu)

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_a + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 .$$

Rýchlosti prúdenia určíme zo známeho prietoku

$$v_2 = \frac{Q_1}{S_2} = \frac{4Q_1}{\pi d_2^2} \quad \text{a} \quad v_3 = \frac{Q_1}{S_3} = \frac{4Q_1}{\pi d_3^2}$$

Tlak na výstupe čerpadla

$$p_2 = p_a + \rho g h_2 + \rho \frac{8Q_1^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{d_3^4} - \frac{1}{d_2^4}\right)$$. Pre dané hodnoty $p_2 \approx 200$ kPa 2 b

e) Výkon sily čerpadla na výstupe $P_2 = F_2 v_2 = \frac{F_2}{S_2} S_2 v_2 = p_2 Q_1$. Rovnako na vstupe čerpadla $P_1 = -F_1 v_1 = -p_1 Q_1$.

Výkon čerpadla

$$P = P_1 + P_2 = Q_1\left(p_2 - p_1\right)$$. Pre dané hodnoty $P \approx 400$ W. 2 b

58. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie D*

Autori úloh: Ľubomír Konrád (2, 3, 4), Ivo Čáp (1, 6, 7), Dušan Nemec (5)

Recenzia a úprava: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha

Preklad do maďarského jazyka: Aba Teleki

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017