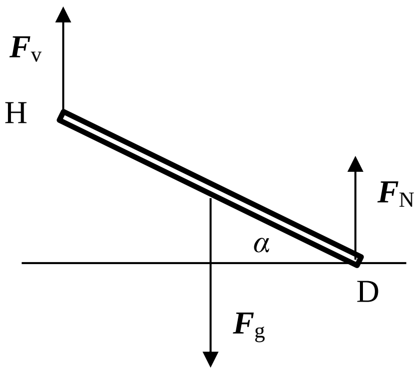
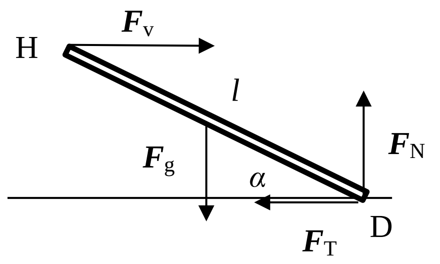
58. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2016/17

Kategória C – krajské kolo
Riešenia úloh

1. *Dvíhanie tyče*

a) Obrázky RC−1 (a) a (b) a RC−2 3×1 b

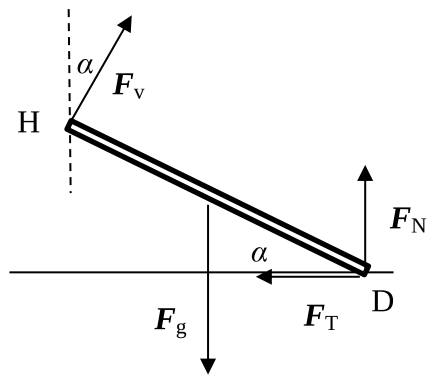




(a) Obr. RC−1 (b)

$\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$: ťahová sila vo vlákne, $\boldsymbol{F}_\mathrm{N}$: tlaková sila podložky, $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$: gravitačná sila pôsobiaca na tyč, $\boldsymbol{F}_\mathrm{T}$: sila trenia medzi tyčou a podložkou

b) V prvom prípade, keď sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ pôsobí zvislo nahor (vlákno zostáva trvale zvislo), sila trenia na dolnom konci tyče je nulová a k prešmyknutiu teda nikdy nedôjde, obr. RC−1 (a). 2 b



Obr. RC−2

V druhom prípade, obr. RC−1(b), keď sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ pôsobí vodorovne (vlákno zostáva trvale vodorovne), v každom okamihu platí pre vodorovné zložky síl $F_\mathrm{T} = F_\mathrm{v}$, pre zvislé zložky $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{g}$ a pre rovnováhu momentov síl vzhľadom na bod D

$$F_\mathrm{v}\, l \sin\alpha = F_\mathrm{g}\, (l/2) \cos\alpha,$$

kde l je dĺžka tyče. (1)

Z podmienky pre neprešmyknutie tyče po podložke $F_\mathrm{T} \le f\, F_\mathrm{N}$ a vzťahu (1) máme

$$F_\mathrm{T} = F_\mathrm{g} \frac{1}{2\tan\alpha} \le f\ F_\mathrm{N} = f\ F_\mathrm{g}, \text{ a teda } \tan\alpha \ge \frac{1}{2f}.$$ 1 b

Ak klesne uhol α pod túto hranicu, čo nastane v druhom prípade vždy v istom okamihu, dolný koniec D tyče sa prešmykne. Kritický uhol

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{1}{2f}\right). \qquad 1\text{ b}$$

V treťom prípade, obr. RC–2, pre rovnováhu vo vodorovnom a zvislom smere platí

$$F_\mathrm{T} = F_\mathrm{v} \sin\alpha$$

$$F_\mathrm{g} - F_\mathrm{v} \cos\alpha = F_\mathrm{N}$$

a momentov síl vzhľadom na bod D

$$F_\mathrm{v}\, l = F_\mathrm{g} \frac{l}{2} \cos\alpha .$$

Podmienka neprešmyknutia v bode D je

$$F_\mathrm{T} \le f F_\mathrm{N}$$

a po dosadení z predchádzajúcich rovníc

$$f \ge \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{2 - \cos^2\alpha} = \mathrm{f}(\alpha) \text{ pre uhly } 0° < \alpha < 90°. \qquad (2) \qquad 1\text{ b}$$

Funkcia $\mathrm{f}(\alpha)$ (2) nadobúda nulové hodnoty pre $\alpha = 0°$ a $\alpha = 90°$. V rámci tohto intervalu má kladné hodnoty (je konkávna), a teda musí mať v tomto intervale maximum, ktoré možno určiť dvojakým spôsobom.

(i) Ak má byť splnená uvedená nerovnica, existuje pre funkciu $\mathrm{f}(\alpha)$ hodnota α_3, pre ktorú má jediné riešenie rovnica

$$f = \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{2 - \cos^2\alpha}.$$

Pre ďalší výpočet je vhodné pravú stranu upraviť na jednu goniometrickú funkciu, napr. $\tan\alpha$

$$f = \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{2 - \cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\left(1 + \tan^2\alpha\right)\left(2 - \frac{1}{1 + \tan^2\alpha}\right)} = \frac{\tan\alpha}{1 + 2\tan^2\alpha}, \qquad (3)$$

odkiaľ dostávame kvadratickú rovnicu pre $\tan\alpha$

$$\tan^2\alpha - 2\frac{1}{4f}\tan\alpha + \frac{1}{2} = 0,$$

ktorej riešenie pre neznámu $\tan\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{1}{4f} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4f}\right)^2 - \frac{1}{2}}.$$

Pre jednoznačné riešenie, ktoré požadujeme, musí byť diskriminant $D = 0$, a teda

$$\frac{1}{4f} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

Po dosadení dostávame kritický uhol $\tan\alpha_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ a $\alpha_3 \approx 35°$.

(ii) Druhá možnosť – jednoduchý postup je výpočtom extrému funkcie (3) pomocou derivácie $\frac{df}{d\alpha} = 0$, teda čitateľ derivácie má byť nulový. Z toho bezprostredne máme

$\tan\alpha_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ a $\alpha_3 \approx 35°$.

Pre tento kritický uhol $f \geq f(\alpha_3) \approx 0{,}29$.

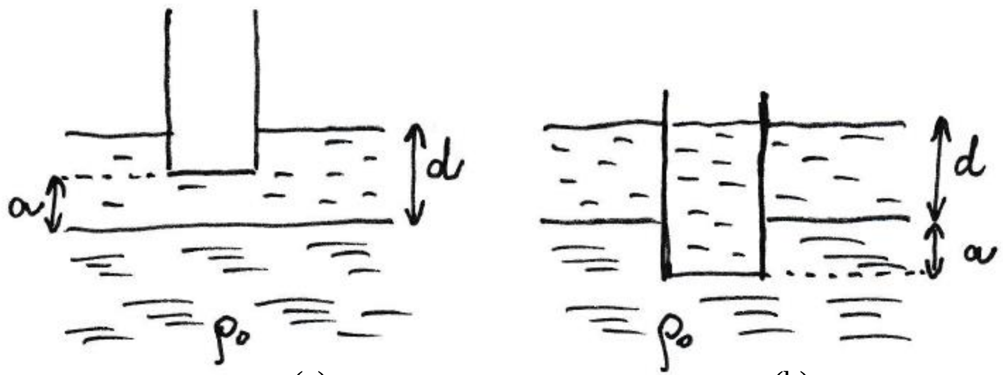
Za správne riešenie pomocou jedného z uvedených postupov 2 b

c) Zhrnutie – pre jednotlivé prípady sú kritické uhly:

α_1 neexistuje, $a_2 = \arctan(1/2f)$, $\alpha_3 = 35°$.

2. *Plávajúci pohár*

a) Obrázok RC–3 2 b



(a) (b)

Obr. RC–3

b) Podmienka rovnováhy pre plávanie prázdneho pohára, obr. RC–3 (a), podľa Archimedovho zákona

$$mg = (d - a)S\rho g\,. \qquad (1) \qquad 1\text{ b}$$

Ak je v pohári olej podľa obr. RC–1 (b), podmienka rovnováhy má tvar

$$mg + (d + a)S\rho g = \rho g\,d\,S + \rho_0\,g\,a\,S\,, \qquad (2) \qquad 1\text{ b}$$

kde na pravej strane rovnice (2) je hmotnosť kvapalín vytlačených ponorenou časťou pohára.

Veličiny a a ρ určíme riešením tejto sústavy rovníc (1) a (2).

Napr. z (1), (2) vylúčime veličiny m a S a dostávame rovnicu

$$(d-a)\rho + (d+a)\rho = \rho d + \rho_0 a ,$$

odkiaľ máme

$$\rho = \rho_0 \frac{a}{d} . \qquad (3)$$

Z (1) a (3) potom dostávame rovnicu

$$\frac{m}{S} = (d-a)\rho = d\left(1-\frac{a}{d}\right)\rho_0 \frac{a}{d} ,$$

ktorú upravíme na tvar kvadratickej rovnice v základnom tvare

$$\left(\frac{a}{d}\right)^2 - \frac{a}{d} + \frac{m}{Sd\rho_0} = 0 .$$

Rovnica má riešenie

$$\frac{a}{d} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m}{Sd\rho_0}} . \qquad (4)$$

Z podmienky reálneho riešenia (D ≥ 0) dostaneme

$$d \geq \frac{4m}{S\rho_0} . \qquad (5)$$

c) Pri zmenšovaní hmotnosti m pohára sa musí vzdialenosť a zväčšovať. Keďže hodnota vzťahu pod odmocninou v (4) s klesajúcou hmotnosťou m rastie, podmienku riešenia spĺňa znamienko (+).

Vzdialenosť a je potom

$$a = d\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m}{Sd\rho_0}}\right) \qquad 2 \text{ b}$$

a hustota oleja

$$\rho = \rho_0\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m}{Sd\rho_0}}\right) . \qquad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $a \approx 62$ mm, $\rho \approx 732$ kg·m^{-3}. 1 b + 1 b

3. *Slnečné kolektory*

a) Užitočný výkon $P = H_0\, S\, p_1\, p_2$. Pre dané hodnoty $P \approx 3{,}4$ kW. 2 b

b) Absorbovaným teplom Q_t sa voda zohreje, pričom platí $Q_t = m\, c\, (t_2 - t_1)$.

Výkon $P = Q_t/\tau = \rho\, (V/\tau)\, c\, (t_2 - t_1) = \rho\, Q_V\, c\, (t_2 - t_1)$.

Objemový prietok $Q_V = \dfrac{P}{\rho c \left(t_2 - t_1\right)}$. Pre dané hodnoty $Q_V \approx 27$ ml/s = 98 l/h. 3 b

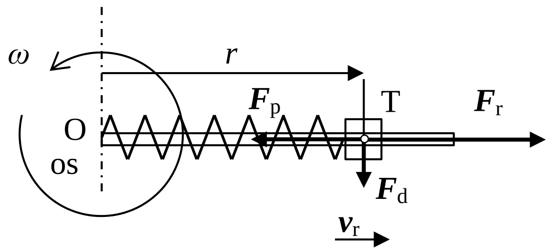
c) Energiu E dodá kolektor za čas $\tau = \dfrac{E}{P}$, pre dané hodnoty $\tau \approx 2{,}9$ h. 3 b

d) Ak sa prietok vody nezmení, pri polovičnom príkone žiarenia poklesne prírastok teploty vody na polovicu, tzn. $t_3 = t_1 + (t_2 - t_1)/2 = 35$ °C. 2 b

4. Teliesko na rotujúcej tyči

a) Obrázok RC–4 1 b

Obr. RC–4



Na teliesko pôsobí sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ pružiny, ktorej veľkosť $F_\mathrm{p} = k\,(r - r_1)$.

V neinerciálnej sústave pôsobí zotrvačná sila spojená s rotáciou vzťažnej sústavy, ktorá má dve zložky. Pozdĺžna (radiálna) je odstredivá sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{r}$ s veľkosťou $F_\mathrm{r} = m\,\omega^2\, r$. Obvodová (dotyčnicová) $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ je reakciou na zvyšovanie rýchlosti $a_\mathrm{d} = \omega\, v_\mathrm{r}$ pri zmene polomeru r a má veľkosť $F_\mathrm{d} = m\,\omega\, v_\mathrm{r}$. 3 × 0,5 b

b) V smere pozdĺž tyče platí v neinerciálnej vzťažnej sústave S rovnica pohybu

$$m a_\mathrm{r} = -\,k\left(r - r_1\right) + m\omega^2\, r\text{, resp. } m a_\mathrm{r} = -\left(k - m\omega^2\right)\, r + k\, r_1\ .$$

Ak sa nachádza teliesko v rovnovážnej polohe na rotujúcej tyči, je $a_\mathrm{r} = 0$, odkiaľ dostávame rovnovážnu vzdialenosť

$r_0 = r_1 \dfrac{k}{k - m\omega^2}$. Pre dané hodnoty $r_0 \approx 50{,}6$ cm. 1 b

Ak zavedieme výchylku telieska z rovnovážnej polohy $x = r - r_0$, môžeme rovnicu pohybu upraviť na tvar

$$m a_\mathrm{r} = -\left(k - m\omega^2\right)x = -\,k^*\, x\ .$$

Pohyb pod účinkom vratnej sily priamoúmernej výchylke z rovnovážnej polohy je kmitavý pohyb s uhlovou frekvenciou

$$\omega_{\mathrm{k}} = \sqrt{\frac{k^*}{m}} = \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}\,. \qquad \text{2 b}$$

Pre dané hodnoty $\omega_{\mathrm{k}} \approx 0{,}941\ \mathrm{s}^{-1}$. 0,5 b

Výchylku vyjadruje funkcia

$$x = x_{\mathrm{m}} \cos \omega_{\mathrm{k}} t\,,$$

kde začiatočná podmienka je $r_1 = r_0 - x_{\mathrm{m}}$, odkiaľ vyjadríme amplitúdu kmitov

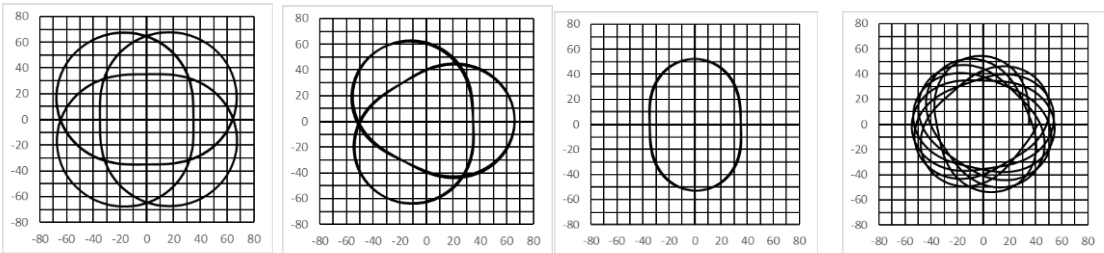
$$x_{\mathrm{m}} = r_0 - r_1 = r_1 \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2}\,.$$ Pre dané hodnoty $x_{\mathrm{m}} \approx 15{,}6$ cm. 1 b

c) Po roztočení tyče sa skladajú dva pohyby – rovnomerné otáčanie s uhlovou rýchlosťou, resp. uhlovou frekvenciou ω, a kmity s uhlovou frekvenciou ω_{k}. Ak za n otočení tyče teliesko vykoná k kmitov, kde n a k sú prirodzené čísla, vyskytne sa teliesko po n otáčkach v pôvodnom začiatočnom bode, tzn. jeho trajektória sa uzatvorí.

Jednoduché trajektórie dostaneme pre $\omega/\omega_{\mathrm{k}} = n/k$,

kde sú malé prirodzené čísla n, k. 1 b

Pre zaujímavosť sú uvedené príklady jednoduchých trajektórií.



$\omega/\omega_{\mathrm{k}} = 3/4$ $\omega/\omega_{\mathrm{k}} = 2/3$ $\omega/\omega_{\mathrm{k}} = 1/2$ $\omega/\omega_{\mathrm{k}} = 1/3$

Zadaným hodnotám zodpovedá $\omega/\omega_{\mathrm{k}} = 0{,}628/0{,}941 \approx 2/3$ (druhý obrázok).

d) V začiatočnej polohe r_1 je radiálna rýchlosť telieska nulová, a teda rýchlosť telieska je iba obvodová $v_1 = \omega\, r_1$. Ak teliesko dosiahne behom kmitu maximálnu vzdialenosť od osi, je jeho radiálna rýchlosť nulová, a rýchlosť telieska je iba obvodová $v_2 = \omega\, r_2$.

Práca je rovná zmene kinetickej energie

$$W = E_{\mathrm{k}2} - E_{\mathrm{k}1} = \frac{1}{2} m\omega^2 (r_1 + 2x_{\mathrm{m}})^2 - \frac{1}{2} m (\omega r_1)^2$$

a po úprave

$$W = 2k\left(\frac{m\omega^2 r_1}{k - m\omega^2}\right)^2.$$ Pre dané hodnoty veličín $W \approx 6{,}22$ mJ. 2 b

58. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie C*

Autori návrhov úloh: Ľubomír Konrád (1,2), Dušan Nemec (3), Ivo Čáp (4)

Spracovanie návrhov: Ivo Čáp

Recenzia a úprava: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha

Preklad zadaní úloh do maďarského jazyka: Aba Teleki

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017