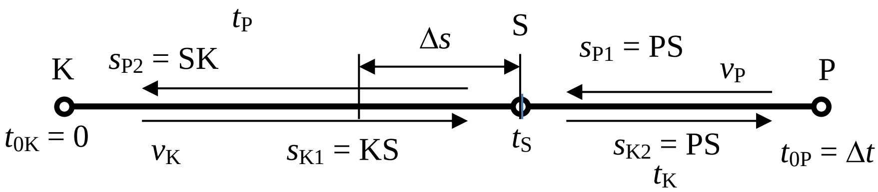
58. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2016/17

Kategória D – krajské kolo
Riešenie úloh

1. *Výlet na bicykloch*

a) Obrázok 1 b



Obr. RD–1

b) Čas štartu Košičana (K) označíme $t_{K0} = 0$, a oneskorený čas štartu Prešovčana (P) $t_{P0} = \Delta t$. Označme t_S čas jazdy K do bodu stretnutia na dráhe $s_{K1} = v_K\, t_S$ a $t_S - \Delta t$ čas jazdy P do bodu stretnutia na dráhe $s_{P1} = v_P\,(t_S - \Delta t)$. Rozdiel týchto dráh $\Delta s = s_{K1} - s_{P1}$.

Pre zvyšok jazdy platí podľa zadania $s_{K2} = s_{P1} = v_K\, t_K$ a $s_{P2} = s_{K1} = v_P\, t_P$. Dostávame tak rovnice

$$v_K\, t_K = v_P\,(t_S - \Delta t) \quad \text{a} \quad v_P\, t_P = v_K\, t_S.$$

Hľadaný čas t_S, získame z kvadratickej rovnice, ktorú dostaneme napr. dosadením jednej z neznámych rýchlostí v_P, v_K z druhej rovnice do prvej a jednoduchou úpravou

$$t_S^2 - \Delta t\, t_S - t_P\, t_K = 0,$$

ktorá má riešenie

$$t_S = \frac{\Delta t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + t_P\, t_K}\ .$$

Fyzikálny zmysel má riešenie (+), lebo pre (–) je výsledok záporný.

Chlapci sa stretnú v čase 8:00 hod. + t_S, kde

$$t_S = \frac{\Delta t}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + t_P\, t_K}$$. Pre dané hodnoty t_S = 69 min = 1 h 9 min. 2 b

Čas stretnutia je 9:09 hod. 0,5 b

c) Rozdiel dráh Δs medzi dráhou K a P do okamihu stretnutia možno vyjadriť dvojakým spôsobom

$$\Delta s = v_K\, t_S - v_P\, t_P = v_K\, t_S - v_P\,(t_S - \Delta t)$$

$$\text{a} \quad \Delta s = v_P\, t_P - v_K\, t_K. \qquad (1)$$

Z rovnosti pravých strán máme

$$v_P = v_K \, \frac{t_S + t_K}{t_P + t_S - \Delta t} \qquad (2)$$

a po dosadení do druhej rovnice (1) a po úprave dostaneme

$$v_K = \Delta s \, \frac{t_P + t_S - \Delta t}{t_P \, t_S - t_K \left(t_S - \Delta t\right)} \qquad (3) \qquad 2\text{ b}$$

a ďalej tiež dosadením (3) do druhej rovnice (1) a úprave

$$v_P = \Delta s \, \frac{t_S + t_K}{t_P \, t_S - t_K \left(t_S - \Delta t\right)} \; . \qquad (4) \qquad 2\text{ b}$$

Pre dané hodnoty v_P = 24 km/h, v_K = 16 km/h. 0,5 + 0,5 b

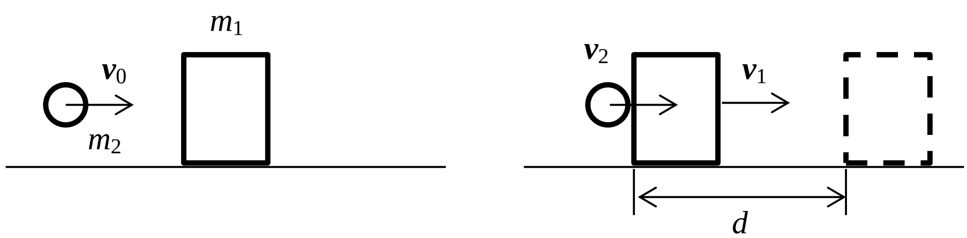
d) Celková dĺžka cesty $s = s_{K2} + s_{P2} = v_K \, t_K + v_P \, t_P$, po dosadení v_K, v_P z výrazov (3) a (4) a po úprave dostaneme

$$s = \Delta s \, \frac{t_P \, t_S + t_K \left(2 t_P + t_S - \Delta t\right)}{t_P \, t_S - t_K \left(t_S - \Delta t\right)} \; . \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty s = 32 km. 0,5 b

2. *Zrážka gule a hranola*

a) Náčrtok RD–2 0,5 b



Obr. RD–2

Tesne po zrážke má hranol rýchlosť v_1 a guľa rýchlosť v_2. Pre zrážku platí zákon zachovania hybnosti a v našom prípade (pružná zrážka) sa zachováva aj kinetická energia sústavy

$$m_2 \, v_0 = m_1 v_1 + m_2 \, v_2 \qquad (1) \qquad 1\text{ b}$$

$$\frac{1}{2} m_2 \, v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 \, v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \, v_2^2 \, . \qquad (2) \qquad 1\text{ b}$$

Rovnice možno upraviť na tvar

$$m_2 \left(v_0 - v_2\right) = m_1 v_1 \qquad (3)$$

$$m_2 \left(v_0^2 - v_2^2\right) = m_1 \, v_1^2 \;, \text{ resp. } \; m_2 \left(v_0 - v_2\right)\left(v_0 + v_2\right) = m_1 \, v_1^2 \, .$$

Ak druhú rovnicu delíme prvou, dostávame

$$v_0 + v_2 = v_1 . \qquad (4)$$

Po dosadení do (3) máme

$$v_2 = v_0 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \quad \text{a} \quad v_1 = v_0 \frac{2m_2}{m_2 + m_1} . \qquad 1 + 1 \text{ b}$$

Hranol sa po zrážke pohybuje po podložke, pričom kinetická energia sa postupne premení na vnútornú energiu trením $-\Delta E_k = W$, kde $W = F_t\, d = f\, m_1\, g\, d$. 1 b

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \left(\frac{2m_2}{m_2 + m_1} \right)^2 = f\, m_1\, g\, d , \qquad 1 \text{ b}$$

odkiaľ

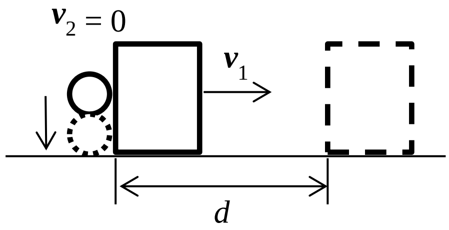
$$d = \frac{v_0^2}{2\, f\, g} \left(\frac{2m_2}{m_2 + m_1} \right)^2 . \qquad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty d = 69 cm. 0,5 b

b) Náčrtok RD–3 0,5 b

Ak má padať guľa zvislo nadol, musí mať po zrážke nulovú rýchlosť.

To nastane iba v prípade rovnakých hmotností $m_1 = m_2$. 1,5 b



Obr. RD–3

3. *Fyzikálny model ruky*

a) Na sústavu ruky pôsobia sila $\boldsymbol{F}_b$ šľachy, gravitačná sila celej sústavy $\boldsymbol{F}_{g1} = m\,\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{F}_k$ tlaková sila kĺbového puzdra. V rovnováhe je moment síl vzhľadom na bod K

$$F_{b1}\, r - F_{g1}\, d_1 = 0.$$

Odtiaľ máme

$$F_{b1} = m\, g \frac{d_1}{r} . \qquad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty F_b = 550 N. 0,5 b

Podmienka rovnováhy síl vo vodorovnom x smere a zvislom y smere je

$$F_{b1} = F_{k1x} \quad \text{a} \quad F_{k1y} = F_{g1}.$$

Tlaková sila v kĺbe

$$F_{k1} = \sqrt{F_{k1x}^2 + F_{k1y}^2} = \sqrt{F_{b1}^2 + F_{g1}^2} = m_1\, g \sqrt{1 + \left(\frac{d_1}{r} \right)^2} . \qquad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $F_k \approx 553$ N. 0,5 b

b) Pri zaťažení činkou v dlani je podmienka rovnováhy

$$F_{b2}\, r \;=\; F_{g1}\, d_1 + F_{g2}\, d_2 \,,$$

odkiaľ máme

$$F_{b2} \;=\; \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{r}\, g \,. \qquad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $F_{b2} \approx 3{,}5$ kN. 0,5 b

Podmienka rovnováhy síl v smeroch x a y

$$F_{b2} = F_{k2x} \qquad \text{a} \qquad F_{k2y} = (m_1 + m_2)\, g.$$

Tlaková sila v kĺbe

$$F_{k2} = \sqrt{F_{k2x}^2 + F_{k2y}^2} = \sqrt{F_{b2}^2 + \left(F_{g1} + F_{g1}\right)^2} = g\sqrt{\left(\frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{r}\right)^2 + \left(m_1 + m_2\right)^2} \,. \qquad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $F_{k2} \approx 3{,}5$ kN. 0,5 b

4. *Skok na snowborde*

a) Ak neuvažujeme trenie, zo zákona zachovania energie máme

$$m\, g\, h_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \,,$$

odkiaľ $v_0 = \sqrt{2\, g\, h_0}$. Pre dané hodnoty $v_0 \approx 20\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (1) 2 b

b) Z bodu B ide o šikmý vrh. Začiatočná rýchlosť má vodorovnú zložku $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ a zvislú zložku $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$.

Na snoubordistu pôsobí iba gravitačná sila $\boldsymbol{F}_g = m\,\boldsymbol{g}$ zvislo nadol. V zvislom smere ide o rovnomerne zrýchlený pohyb, pre ktorý platí

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g\, t, \qquad (2)$$

$$y = v_0\, t \sin \alpha - (1/2)\, g\, t^2. \qquad (3)$$

Vo vodorovnom smere ide o rovnomerný pohyb (nulová zložka sily)

$$v_x = v_0 \cos \alpha \qquad (4)$$

$$x = v_0\, t \cos \alpha. \qquad (5)$$

V bode C snoubordista prestáva stúpať, tzn. $v_{Cy} = 0$. Celková rýchlosť $v_C = v_{Cx}$ (3).

Opäť zo zákona zachovania energie

$$m\, g\, h_0 = \frac{1}{2} m v_C^2 + m\, g\, h \,,$$

odkiaľ máme s použitím (1)

$$h = h_0 - \frac{1}{2g} v_C^2 = h_0 - \frac{1}{2g} v_0^2 \cos^2\alpha = h_0 \cos^2\alpha \,.$$

Pre dané hodnoty $h \approx 15$ m. 2 b

c) V bode D je nulová výška snoubordistu $y_D = 0$. Z (3) určíme čas letu

$$t_D = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \,.$$

Po dosadení do (5) máme

$$d = v_0 t_D \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin\alpha \cos\alpha = 4 h_0 \sin\alpha \cos\alpha \,.$$

Pre dané hodnoty $d \approx 35$ m. 2 b

d) V bode C je sila $\boldsymbol{F}_g$ kolmá na smer pohybu, tzn. ide o dostredivú silu

$$F_d = m \frac{v_C^2}{R} = m\,g \,, \tag{6}$$

odkiaľ

$$R = \frac{v_C^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g} = 2 h_0 \cos^2\alpha \,.$$ Pre dané hodnoty $R \approx 30$ m. 2 b

V sústave spojenej so snoubordistom (neinerciálnej vzťažnej sústave) pôsobí okrem gravitačnej sily $\boldsymbol{F}_g$ zotrvačná sila $\boldsymbol{F}_o = m\, v_C^2/R$. Obe sily sú rovnako veľké, pozri (6), a majú opačný smer. Ich súčet je preto nulový. V okamihu prechodu bodom C ide o nulovú tiaž – beztiažový stav. 2 b

58. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie D*

Autori návrhov úloh: Ľubomír Mucha (1), Ľubomír Konrád (2, 3, 4)

Spracovanie návrhov: Ivo Čáp

Recenzia a úprava: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha

Preklad zadaní úloh do maďarčiny: Aba Teleki

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017