

59. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2017/2018

Kategória A – celoštátne kolo

Košice, 13. 4. 2018

Riešenie teoretických úloh

1. Lissajousove obrazce PŠ

Riešenie:

- a) Pružina je napínaná v pokojovej polohe guľôčky silou $F_0 = k(l - l_0)$, kde l je dĺžka pružiny deformovanej silou F_0 . V pokojovej polohe pôsobia na guľôčku sily pružín s rovnakou veľkosťou a opačným smerom, teda ich výslednica je nulová.

Ak vychýlime guľôčku o vzdialenosť x v smere pružín, výsledná sila pružín pôsobiacich na guľôčku je

$$F = k(l - l_0 - x) - k(l - l_0 + x) = -2kx.$$

Pohybová rovnica guľôčky

$$ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -2kx, \text{ resp. } a = -\left(\frac{2k}{m}\right)x,$$

je rovnica harmonického kmitavého pohybu.

1 b

To znamená, že guľôčka koná harmonické kmity s výchylkou $x(t)$ danou funkciou

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi),$$

kde x_m je amplitúda kmitov, φ začiatočná fáza závislá od začiatočných podmienok a

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

uhlová frekvencia kmitov.

Periódka kmitov (doba kmitu)

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}} = \pi \sqrt{\frac{2m}{k}} \quad (1)$$

nezávisí od sily F_0 .

1 b

Veľkosť výchylky je obmedzená na hodnoty, pre ktoré platí lineárny vzťah medzi silou F_0 a výchylkou x .

Pre dané hodnoty $T_1 \approx 0,70$ s.

1 b

- b) Ak sa guľôčka vychýli napravo o x kolmo na pružiny, obr. RA-1, zmení sa dĺžka pružiny o $\Delta l = \sqrt{b^2 + y^2} - b$ a pružina pôsobí na guľôčku silou $F_p = F_0 + k\Delta l$.

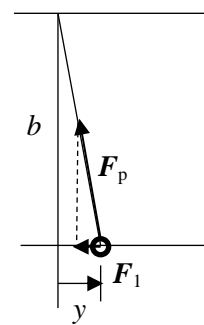
Proti smeru výchylky pôsobí sila od oboch pružín

$$F = 2F_1 = -2F \frac{x}{\sqrt{b^2 + y^2}} = -2 \left[F_0 + k(\sqrt{b^2 + y^2} - b) \right] \frac{y}{\sqrt{b^2 + y^2}}.$$

Ak predpokladáme malé výchylky $y \ll b$, pre silu F použijeme približné vyjadrenie

$$F = -2 \left[F_0 + kb \left(\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} - 1 \right) \right] \frac{y}{b \sqrt{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}} \approx -2F_0 \left(1 + \frac{kb}{2F_0} \frac{y^2}{b^2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{b^2} \right) \frac{y}{b}.$$

Pre malé výchylky ($y \ll b$ a tiež $y^2 \ll b^2$)



Obr. RA-1

$$\frac{kb}{2F_0} \frac{y^2}{b^2} \ll 1, \text{ tzn. } F_0 \gg \frac{ky^2}{2b} \quad (2)$$

platí

$$F \approx -\frac{2F_0}{b} y, \text{ čo je podmienka vzniku harmonických kmitov.} \quad 1 \text{ b}$$

Riešením pohybovej rovnice $F = ma$ analogicky ako v predchádzajúcom prípade dostaneme harmonickú funkciu a dobu kmitu

$$T_2 = \pi \sqrt{\frac{2mb}{F_0}}. \quad (3) \quad 1 \text{ b}$$

Z výsledku vidíme, že pre vznik harmonických kmitov je potrebná dostatočne veľká sila $F_0 \gg \frac{y^2}{2b} k$, pozri (2). Ak nie je splnená táto podmienka, guľôčka bude kmitať okolo rovnovážnej polohy, ale kmity nebudú harmonické. 1 b

- c) Ak sú splnené podmienky pre vznik harmonických kmitov v oboch smeroch, skladajú sa kmity s periódou T_1 v smere x a T_2 v smere y a trajektória guľôčky pri vhodných začiatočných podmienkach vytvára rôzne obrazce. Doba kmitu T_1 v smere x je vo všetkých prípadoch rovnaká. Základná podmienka pre vznik priečných harmonických kmitov v smere y , ako vyplýva z (2), je

$$\frac{y^2}{b^2} \ll 1. \quad (4)$$

Ak je pomer $y/b = 1\%$, znamená to pri $b = 10 \text{ cm}$ $x < 1 \text{ cm}$, tzn. rozmery obrazcov môžu byť niekoľko milimetrov.

Trajektória guľôčky v tvare úsečky vznikne, ak platí $T_2 = T_1$ a ak na začiatku vychýlime guľôčku do niektorej polohy mimo osi a uvoľníme ju, obr. RA-2 (a).

Z podmienky rovnosti periód máme

$$\sqrt{\frac{mb}{2F_0}} = \sqrt{\frac{m}{2k}}, \text{ odkiaľ } F_0 = kb. \text{ Pre dané hodnoty } F_0 \approx 20 \text{ mN.}$$

Overíme dodatočnú podmienku (2)

$$\frac{y^2}{b^2} \ll \frac{2F_0}{kb} = 2, \text{ čo pri platnosti (4) splňa podmienku harmonických kmitov.} \quad 0,5 \text{ b}$$

Trajektória guľôčky v tvare číslu 0 vychádza z rovnakého predpokladu $T_2 = T_1$ s rovnakou hodnotou F_0 . Rozdiel je v začiatočnej podmienke. Časticu vychýlime pozdĺž osi x v smere pružín a udelíme jej impulz v smere y kolmom na túto os, obr. RA-2 (b).

Kmity majú rovnakú periódou a fázovo sú posunuté o 90° , trajektóriou je elipsa. 0,5 b

Trajektóriu guľôčky v tvare číslu 8 dostaneme, ak $T_2 = T_1/2$. Za dobu jedného kmitu v smere x pružín vykoná guľôčka dva kmity v kolmom smere y . Začiatočná podmienka vzniku tejto trajektórie je rovnaká ako v prípade 0, obr. RA-2 (c). Silu určíme z porovnania periód

$$2 \sqrt{\frac{mb}{2F_0}} = \sqrt{\frac{m}{2k}}, \text{ odkiaľ máme } F_0 = 4kb. \text{ Pre dané hodnoty } F_0 \approx 80 \text{ mN.}$$

Dodatočná podmienka (2) vzniku harmonických kmitov

$$\frac{y^2}{b^2} \ll \frac{2F_0}{kb} = 8, \text{ je pri platnosti (4) splnená.} \quad 0,5 \text{ b}$$

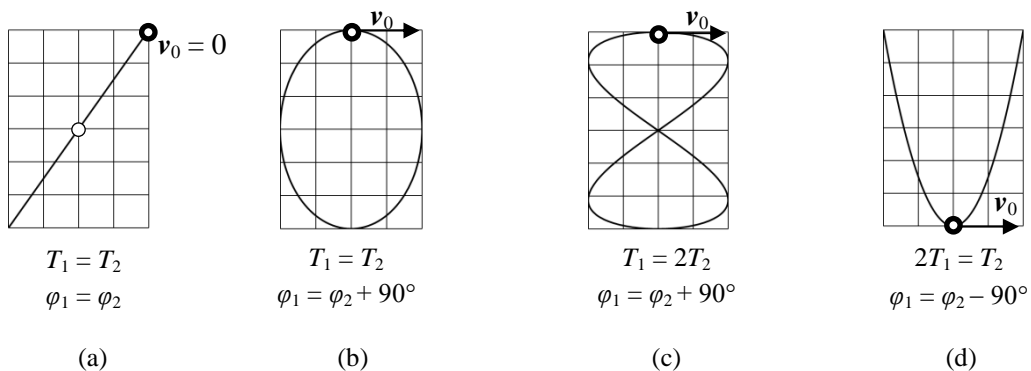
Trajektóriu guľôčky v tvare znaku \cup dostaneme, ak platí $T_2 = 2 T_1$. Za polperiódu v smere pružín vykoná štvrtperiódu v kolmom smere. Zo vzťahu pre periódy máme

$$\sqrt{\frac{mb}{2F_0}} = 2 \sqrt{\frac{m}{2k}}, \text{ odkiaľ } F_0 = \frac{1}{4} kb. \text{ Pre dané hodnoty } F_0 \approx 5,0 \text{ mN.}$$

Pre posúdenie vzniku harmonických kmitov overíme podmienku (2)

$$\frac{y^2}{b^2} \ll \frac{2F_0}{kb} = \frac{1}{2}, \text{ ktorá je o málo náročnejšia ako podmienka (4).} \quad 0,5 \text{ b}$$

Zobrazenie tvarov trajektórie a začiatočných podmienok je na obr. RA–2.



Obr. RA–2 Lissajousove obrazce pre amplitúdy $x_m/y_m = 1,5$

(za každý obrázok s vyznačenými začiatočnými podmienkami) $4 \times 0,5 \text{ b}$

2. Zelektrizovaná mydlová bublina

Riešenie:

- a) Pre hmotnosť m kvapky a bubliny platí

$$m = 4\pi R_1^2 h_1 \rho, \text{ odkiaľ máme } h_1 = \frac{m}{4\pi R_1^2 \rho}.$$

Pre dané hodnoty $h_1 \approx 2,84 \mu\text{m}$.

1 b

Rozdiel tlaku vzduchu medzi vnútrom a vonkajškom bubliny je spôsobený povrchovým napätím. Tlak p_σ spôsobený povrchovým napätím najjednoduchšie určíme tak, že uvažujeme celkovú silu povrchového napätia pôsobiacu na polguľovú plochu na jej okraji (dva povrchy – vnútorný a vonkajší), ktorá je v rovnováhe s tlakovou silou pôsobiacu na priemet polgule do roviny jej okrajovej kružnice

$$2(2\pi R_1 \sigma) = F_\sigma = p_\sigma \pi R_1^2, \text{ odkiaľ máme } p_\sigma = \frac{4\sigma}{R_1}.$$

Pre dané hodnoty $p_\sigma \approx 1,5 \text{ Pa}$

1 b

- b) V dôsledku prítomnosti elektrického náboja rozloženého rovnomerne po povrchu bubliny vznikajú medzi jej jednotlivými časťami odpudivé sily, ktoré pôsobia proti príťažlivým silám povrchového napätia a tak výsledné povrchové napätie znižuje.

Tlak p_e vyvolaný elektrickým nábojom najjednoduchšie určíme pomocou zmeny energie E_e elektrického poľa bubliny (guľovej plochy)

$$E_e = \frac{1}{2} Q \varphi, \text{ alebo tiež } E_e = \frac{1}{2} C \varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

kde $C = Q/\varphi$ je elektrická kapacita guľovej plochy.

Potenciál zelektrizovanej gule

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \text{ kde } r \text{ je polomer guľovej plochy.} \quad (1)$$

Energia poľa zelektrizovanej guľovej plochy (práca, ktorú musí vykonať vonkajšia sila, aby preniesla náboj Q na guľovú plochu po malých čiastkach dq)

$$E_e = \int_0^Q \varphi dq = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} dq = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r}.$$

Ak zmeníme polomer r guľovej plochy o hodnotu dr pri konštantnom náboji Q (zdroj je odpojený), vykoná sa práca

$$\delta W = p_e dV = -dE_e,$$

kde $dV = 4\pi r^2 dr$ je zmena objemu guľovej plochy.

(2)

Tlak p_e spôsobený prítomnosťou náboja Q na guľovej ploche s polomerom r , ako to vyplýva z výrazu (2),

$$p_e = -\frac{dE_e}{dV} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dE_e}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\epsilon_0 \varphi^2}{2r^2}, \quad 2 \text{ b}$$

kde sme výraz upravili pomocou (1).

Pre daný polomer R_1 máme

$$p_e = \frac{\epsilon_0 \varphi^2}{2R_1^2}.$$

Rozdiel tlaku vzduchu na vnútornej a vonkajšej strane bubliny je daný tlakom p_σ spôsobeným povrchovým napätím zmenšeným o elektrostatický tlak p_e

$$\Delta p_1 = p_1 - p_0 = \frac{4\sigma}{R_1} - \frac{\varepsilon_0 \varphi^2}{2R_1^2}. \quad (3)$$

Bublina sa môže udržať, ak je $\Delta p_1 > 0$.

Z výsledku (3) máme podmienku

$$\frac{4\sigma}{R_1} > \frac{\varepsilon_0 \varphi^2}{2R_1^2}, \text{ odkiaľ máme } \varphi < 2\sqrt{\frac{2\sigma R_1}{\varepsilon_0}} = \varphi_m.$$

Pre dané hodnoty $\varphi_m = 11,6 \text{ kV}$.

2 b

- c) Ak sa bublina vybije, prestane pôsobiť elektrostatický tlak a polomer bubliny sa zmenší. Ak uvažujeme izotermický dej, tlak vzduchu v bubline sa zvýši na hodnotu

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = p_1 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3, \quad (4)$$

pričom platí podmienka rovnováhy síl

$$p_2 - p_0 = \frac{4\sigma}{R_2}. \quad (5)$$

Ak za tlak p_1 dosadíme z (3) a tlak p_2 z (4) a (5), dostávame rovnicu

$$p_0 + \frac{4\sigma}{R_2} = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{R_1} - \frac{\varepsilon_0 \varphi^2}{2R_1^2} \right) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3. \quad (6)$$

2 b

Rovnicu upravíme na tvar, v ktorom máme veľmi malé rozdiely mocnín polomerov

$$p_0(R_2^3 - R_1^3) + 4\sigma(R_2^2 - R_1^2) = -\frac{\varepsilon_0 \varphi^2 R_1}{2}. \quad (7)$$

S použitím predpokladu $\Delta R/R_1 \ll 1$ rozdiely upravíme a zanedbáme malé veličiny druhého a vyššieho rádu $(\Delta R)^2$, $(\Delta R)^3$

$$R_2^3 = (R_1 + \Delta R)^3 \approx R_1^3 \left(1 + 3 \frac{\Delta R}{R_1} \right),$$

$$R_2^2 = (R_1 + \Delta R)^2 \approx R_1^2 \left(1 + 2 \frac{\Delta R}{R_1} \right). \quad (7)$$

Po dosadení približných vzťahov (7) do rovnice (6) a ďalšími úpravami dostaneme

$$\Delta R = -\frac{\varepsilon_0 \varphi^2}{2(3p_0 R_1 + 8\sigma)}.$$

Pre dané hodnoty $\Delta R = -7,3 \times 10^{-8} \text{ m}$ a teda $R_1 \approx R_2$.

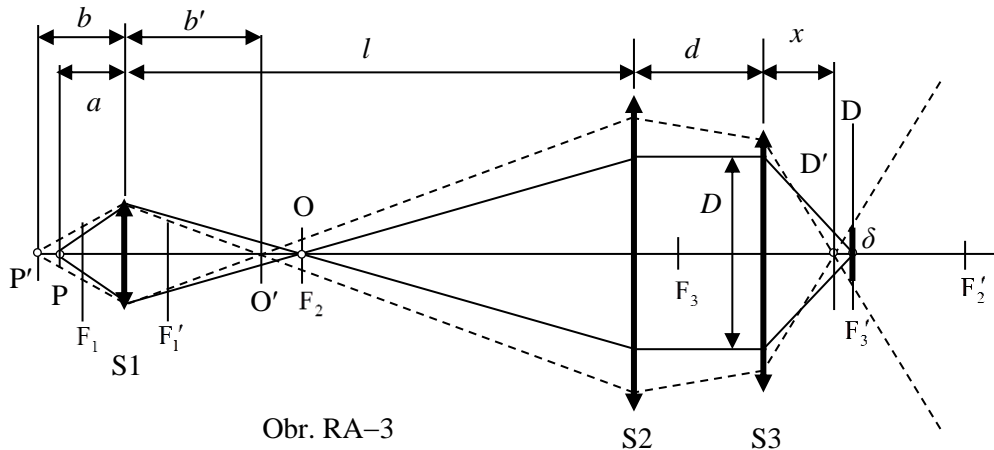
Z výsledku je zrejmé, že zelektrizovanie bubliny nemá merateľný vplyv na jej rozmer.

2 b

3. Konfokálny mikroskop

Riešenie:

- a) Schéma je na obr. RA-3, pričom chod lúčov z bodu P cez bod O až do bodu D je znázornený plnými čiarami.



Obr. RA-3

Postup zostrojenia schémy podľa informácií v zadaní úlohy:

Na optickú os zakreslíme tri spojné šošovky, S1 objektív, S2 okulár, S3 objektív fotoaparátu, s uvedenými vzdialenosťami l a d . Lúče medzi šošovkami S2 a S3 sú rovnobežné s optickou osou, a preto sa lámu do ohniska F_3' šošovky S3, do ktorého zakreslíme obrazovú rovinu, v ktorej vzniká bodový obraz D predmetu P. Aby boli lúče za šošovkou S2 rovnobežné, musia prechádzať jej predmetovým ohniskom F_2 (bod O). Lúče predĺžime až k šošovke S1. Tieto lúče vznikajú lomom lúčov na šošovke S1 vychádzajúcich z predmetu P na osi. Bod P určuje polohu predmetovej roviny vo vzdialenosti a od S1. Zaostrný mikroskop zobrazí bod P do bodu D.

Obrázok s lúčmi plnou čiarou a opisom konštrukcie 2 b

- b) Bod O je obrazom bodu P šošovkou S1. Bod O je v ohnisku F_2 šošovky S2, a teda vo vzdialenosti f_2 od šošovky S2. Pre zobrazenie bodu P šošovkou S1 platí rovnica

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{l - f_2} = \frac{1}{f_1}, \text{ odkiaľ máme } a = \frac{f_1(l - f_2)}{l - f_2 - f_1}.$$

Pre dané hodnoty $a \approx 12,5$ mm.

2 b

- c) V schéme na obr. RA-3 je chod lúčov vychádzajúcich z bodu P' znázornený čiarkovane.

Postup zostrojenia:

Bod P' zakreslíme vľavo ďalej ako P od S1. Obrazom na osi je bod O' bližšie k S1 ako O. Po dopade na šošovku S2 sa lúče lámu tak, že vytvárajú mierne zbiehavý zväzok. Ten dopadá na S3 a láme sa do bodu D', ktorý je bližšie k S3 ako D. Lúče pokračujú za bod D' a v detekčnej rovine vytvoria kruhovú stopu.

Dokreslenie čiarkovaných lúčov a zobrazenie kruhovej stopy 2 b

Označíme b' vzdialenosť S1-O'. Zobrazovacia rovnica je

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f_1}, \text{ odkiaľ } b' = \frac{b f_1}{b - f_1}.$$

Predmetová vzdialenosť šošovky S2 je $c = l - b'$.

Obrazovú vzdialenosť c' šošovky S2 určíme z rovnice

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{c'} = \frac{1}{f_2}, \text{ odkiaľ máme } \frac{1}{c'} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{l-b'} = \frac{1}{f_2} - \frac{b-f_1}{b(l-f_1)-lf_1}.$$

Z obr. RA-3 vidíme, že obraz sa nachádza až za šošovkou S3, tzn. v jej obrazovom priestore, a preto predmetovú vzdialenosť šošovky S3 označíme $-(c' - d)$. (Môžeme sa o tom presvedčiť aj orientačným výpočtom $c' \approx 6,60 \text{ m} \gg d$).

Zobrazenie šošovkou S3 opisuje rovnica

$$-\frac{1}{c'-d} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f_3}, \text{ odkiaľ } \frac{1}{x} = \frac{1}{f_3} + \frac{1}{c'-d} = \frac{1}{f_3} + \frac{1}{c'} \frac{1}{1-\frac{d}{c'}}.$$

Pre dané a vypočítané hodnoty dostaneme $x \approx 34,8 \text{ mm}$ a vzdialenosť od detekčnej roviny $\Delta x = f_3 - x \approx -0,2 \text{ mm}$.

Keď je priemer zväzku D , priemer stopy v detekčnej rovine je daný vzťahom

$$\frac{D}{x} = \frac{\delta}{f_3 - x}, \text{ resp. } \delta = D \frac{f_3 - x}{x} = D \frac{\Delta x}{x}. \text{ Pre dané hodnoty } \delta \approx 46 \text{ } \mu\text{m}, \quad 2 \text{ b}$$

čo stačí, aby boli ostré hrany obrazu neostré (rozmazané).

d) Odpovede na otázky

- Osvetľovací zväzok je zaostrý bod vo zvolenej predmetovej rovine. Odrazené svetlo z tohto bodu je tak najintenzívnejšie. Do detektora prejde clonou C2 iba svetlo z bodu A ktoré je na otvor v clone zaostrené. Svetlo bodov A' na osi nad a pod predmetovou rovinou vytvára na clone kruhovú stopu, ktorá sa clonou odtieni. Odrazy od bodov A' tak neovplyvnia obraz bodov z predmetovej roviny. 0,5 b
- Ako sa ukázalo, pri zobrazení hrubej vzorky bežným mikroskopom, ostrý obraz bodov z predmetovej roviny je prekrytý kruhovými stopami bodov pod alebo nad touto rovinou, čo vytvára pozadie, ktoré vnímame ako neostrosť obrazu, obr. A-2 (b). Systémom konfokálneho mikroskopu sa toto pozadie odstráni a obraz bodov predmetovej roviny zostáva ostrý. obr. A-2 (c-e). 0,5 b
- Zaostriť na inú rovinu možno tak, že vzorku posunieme v smere osi. Druhou možnosťou je posúvanie objektívu mikroskopu v smere ku vzorke alebo od nej. 0,5 b
- Aby bolo možné zaostriť osvetľovací zväzok s presnosťou na niekoľko μm , je potrebný ako zdroj paralelný zväzok koherentného svetla, čo poskytuje laser. 0,5 b

Pozn.: Metóda bola známa už v 40tych rokoch 20. storočia, ale technicky sa začala rozvíjať až v 60tych rokoch v nadväznosti na zostrojenie prvého lasera v roku 1960.

4. Štiepenie jadra ^{235}U

Riešenie:

- a) Zákon rádioaktívnej premeny je daný vzťahom $N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$,

odkiaľ pre aktivitu máme $A = -\frac{dN}{dt} = N_0 \frac{\ln 2}{T} e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$.

Aktivita prírodnej rudy v čase $t = 0$ s

$$A_1 = \frac{\ln 2}{T_1} N_{01} + \frac{\ln 2}{T_2} N_{02} = \frac{\ln 2}{T_1} \frac{p_1 m N_A}{M_{\text{m UO}_2(1)}} + \frac{\ln 2}{T_2} \frac{(1-p_1) m N_A}{M_{\text{m UO}_2(2)}}, \quad (1)$$

kde $M_{\text{m UO}_2(1)} = (235+2 \times 16) \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M_{\text{m UO}_2(2)} = (238+2 \times 16) \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ sú molárne hmotnosti zložiek rudy.

Pre dané hodnoty $A_1 \approx 4,78 \times 10^{11} \text{ Bq}$. 1 b

Aktivitu A_2 vzorky s obohateným palivom vypočítame pomocou rovnakého vzťahu ako aktivitu A_1 , len použijeme hmotnostné pomery p_2 a $1-p_2$.

Pre dané hodnoty $A_2 \approx 5,48 \times 10^{11} \text{ Bq}$. 1 b

- b) Rovnica reakcie



- c) Uvoľnená energia

$$E_1 = \Delta m c^2 = (m_{\text{U}} - m_{\text{Ce}} - m_{\text{Zr}} - m_{\text{n}}) c^2.$$

Pre dané hodnoty $E_1 \approx 3,29 \times 10^{11} \text{ J} \approx 205,5 \text{ MeV}$. 1 b

Pozn.: Keďže rozdiel hmotností $\Delta m \approx 0,22 \text{ u}$ je veľmi malý, treba použiť hodnoty relatívnych hmotností s presnosťou najmenej na tri desatinné miesta.

- d) Celková uvoľnená energia z obohateného paliva

$$E_2 = E_1 \frac{p_2 m N_A}{M_{\text{m UO}_2(1)}}. \text{ Pre dané hodnoty } E_2 \approx 1,09 \times 10^{17} \text{ J} \approx 30,3 \text{ TWh}. \quad 1 \text{ b}$$

Doba $t_2 = \frac{E_2}{P}$. Pre dané hodnoty $t_2 \approx 2,30 \text{ r}$. 1 b

Pozn.: V skutočnosti je využitie energie na teplo iba okolo 90 %.

- e) Počet jadier Ce a jadier Zr je rovnaký ako počet pôvodných jadier ^{235}U .

$$A_3 = \ln 2 N_A m \left[\left(\frac{1}{T_{\text{Ce}}} + \frac{1}{T_{\text{Zr}}} \right) \frac{p_2}{M_{\text{m UO}_2(1)}} + \frac{(1-p_2)}{T_{\text{U}238} M_{\text{m UO}_2(2)}} \right].$$

Pre dané hodnoty $A_3 \approx 6,10 \times 10^{20} \text{ Bq}$. 1 b

Z výsledku je zrejmé, že rádioaktivita vyhoreného paliva je o 9 rádov väčšia ako pôvodného paliva. Z toho vyplývajú problémy s uskladnením vyhoreného paliva.

f) Pre zrážku platia ZZH a ZZE.

Najprv určíme rýchlosť rýchleho neutrónu a rozhodneme, či možno použiť klasickú fyziku

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{k1}}{m_n}}.$$

Pre dané hodnoty $v_1 \approx 1,96 \times 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} < c/10$. Zrážku možno riešiť s dostatočnou presnosťou klasicky.

Rovnice ZZH a ZZE majú tvar (obr. RA-3)

$$m_n v_1 = m_n v_2 \cos \alpha + m_c v_3 \cos \beta$$

$$0 = m_n v_2 \sin \alpha - m_c v_3 \sin \beta$$

$$m_n v_1^2 = m_n v_2^2 + m_c v_3^2.$$

Z prvej a druhej rovnice vylúčime β a pomocou tretej rovnice rýchlosť v_3 a dostávame

$$\left(\frac{m_c}{m_n} + 1\right) \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 2\frac{v_2}{v_1} \cos \alpha - \left(\frac{m_c}{m_n} - 1\right) = 0,$$

odkiaľ

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{\frac{m_c}{m_n} + 1} \left[\cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{m_c}{m_n}\right)^2 - 1} \right], \quad \text{z podmienky } v_2/v_1 > 0 \quad \text{použijeme}$$

znamienko +.

Pre pomer kinetických energií neutrónu máme

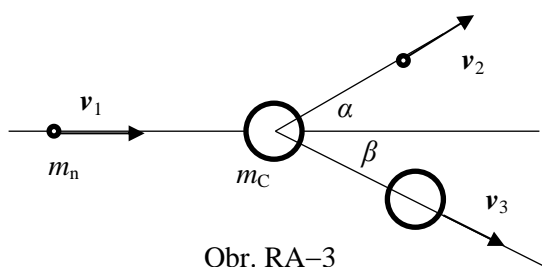
$$r(\alpha) = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{m_n^2}{(m_c + m_n)^2} \left[\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{m_c}{m_n}\right)^2 - 1} \right]^2. \quad 2b$$

Z výrazu priamo vidíme, že pre $\alpha = 0$ je $r = 1$ (neutrón jadro minie a nenarazí doň).

Pre $\alpha = \pi$ rad, $\cos \alpha = -1$, $r(\pi) = \left(\frac{m_c - m_n}{m_c + m_n}\right)^2$ (stredová zrážka, neutrón sa odrazí nazad).

Druhý prípad predstavuje udelenie maximálnej energie jadrú, teda maximálny úbytok energie neutrónu, a teda

$$r_{\min} = \left(\frac{m_c - m_n}{m_c + m_n}\right)^2. \quad \text{Pre dané hodnoty } r_{\min} \approx 0,72. \quad 1b$$



Obr. RA-3