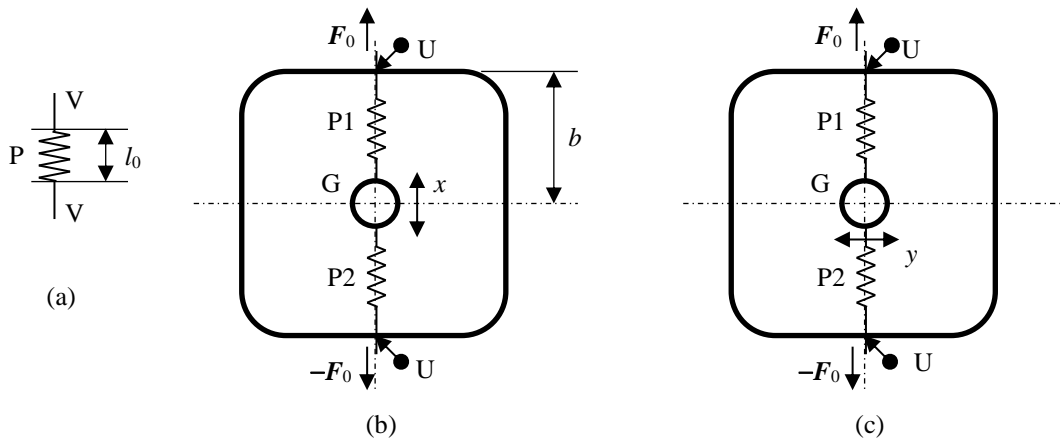


59. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2017/2018
Kategória A – celoštátne kolo
Košice, 13. 4. 2018
Text teoretických úloh

1. Lissajousove obrazce

V strede voľnej hladiny vody v nádobe so štvorcovým pôdorysom so stranou $2b$ pláva guľôčka s hmotnosťou m . Guľôčka je spojená s protíahlými stenami nádoby rovnakými pružinami, ktoré sú rovnobežné s hladinou vody a kolmé na bočné steny nádoby, obr. A–1. Pružiny majú tuhosť k a nezaťažené dĺžku l_0 , obr. A–1 (a). Každá pružina je pripojená jedným koncom V vodiaceho drôtika ku guľôčke. Druhý koniec vodiaceho drôtika prechádza otvorom v stene nádoby, obr. A–1 (b). Na začiatku sa pružiny napnú silou F_0 a v otvoroch zašifujú upínacími kolíkmi U.



Obr. A–1

- a) V prvom prípade, obr. A–1 (b), guľôčku vychýlime z rovnovážnej polohy v smere x pružín a uvoľníme. Dokážte, že guľôčka bude vykonávať harmonické kmity okolo rovnovážnej polohy, odvodte vzťah pre periódu T_1 kmitov ako funkciu sily F_0 . Aká podmienka musí byť splnená, aby boli kmity guľôčky harmonické?
- b) V druhom prípade, obr. A–1 (c), guľôčku vychýlime z rovnovážnej polohy v smere y kolmom na pružiny a uvoľníme. Dokážte, že guľôčka bude kmitať okolo rovnovážnej polohy a uveďte, aká podmienka musí byť splnená, aby tieto kmity boli harmonické. Odvodte vzťah pre periódu T_2 harmonických kmitov guľôčky ako funkciu sily F_0 .
- c) Guľôčka môže vykonávať súčasne kmity v oboch smeroch x a y . Trajektória guľôčky je potom superpozíciou týchto kmitov. Uveďte, či môže mať trajektória kmitov guľôčky tvar „/“ (šikmej úsečky), znaku „∪“, číslice „0“ (nula) a číslice „8“ (osem). V prípadoch, keď je vaša odpoveď „áno“, určte hodnotu sily F_0 , periódy T_1 a T_2 kmitov v oboch smeroch a na obrázku znázorníte začiatkové podmienky pre vznik uvedených tzv. Lissajousových obrazcov.

Úlohu riešte všeobecne a časť c) pre hodnoty: $m = 5,0$ g, $b = 10$ cm, $k = 0,20$ N·m⁻¹.

Pružina si zachováva svoj smer pri ňaťahovaní i stláčaní. Odpor vody proti pohybu guľôčky neuvažujte. Pri úpravách možno použiť približný vzťah $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, kde $x \ll 1$ a n je reálne číslo.

2. Zelektrizovaná mydlová bublina

Z kvapky elektricky vodivej mydlovej vody s hmotnosťou $m = 15$ mg vytvoríme bublinu. Následne ju pripojíme na zdroj vysokého napätia a zelektrizujeme na potenciál $\varphi = 10$ kV a zdroj odpojíme. Po zelektrizovaní má bublina polomer $R_1 = 20$ mm.

- Určte hrúbku h_1 steny bubliny a rozdiel $\Delta p_1 = p_1 - p_0$ tlaku p_1 vzduchu vo vnútri bubliny a tlaku p_0 vzduchu mimo nej.
- Určte maximálnu hodnotu φ_m potenciálu φ , pri ktorej už bublina s polomerom R_1 nemôže existovať.

Potom bublinu jemným dotykom tenkého vodiča vybijeme na nulový potenciál. Polomer bubliny sa v dôsledku vybitia zmení na hodnotu R_2 .

- Určte zmenu $\Delta R = R_2 - R_1$ polomeru R bubliny a posúďte, či táto zmena je pozorovateľná.

Predpokladajte, že všetky termodynamické zmeny v sústave (bublina, vzduch) sú izotermické a zmena polomeru bubliny $|\Delta R| \ll R_1$.

Úlohu riešte všeobecne a pre hodnoty: hustota mydlovej vody $\rho = 1,05 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, povrchové napätie mydlovej vody $\sigma = 7,5 \text{ mN}\cdot\text{m}^{-1}$, elektrická konštanta $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$, $p_0 = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$.

3. Konfokálny mikroskop

Bežný mikroskop je optická sústava, ktorá pozostáva z dvoch šošoviek. Prvá šošovka S1 s ohniskovou vzdialenosťou f_1 niekoľko milimetrov je objektív, druhá šošovka S2 s ohniskovou vzdialenosťou f_2 niekoľko centimetrov je okulár, pričom vzájomná vzdialenosť l šošoviek je od desať do dvadsať centimetrov. Takýto mikroskop má veľmi malú hĺbku ostrosti, a preto je vhodný na zobrazovanie planárnych vzoriek (tenkých vrstiev napr. medzi dvomi sklíčkami). Pri skúmaní hrubších vzoriek s povrchovou 3D štruktúrou vzniká neostrý obraz.

Uvažujte mikroskop, ktorého šošovky majú ohniskové vzdialenosti $f_1 = 10$ mm, $f_2 = 10$ cm a vzdialenosť medzi šošovkami $l = 15$ cm. Pri zaostrení lúče vychádzajúce z bodu predmetu na osi sústavy vystupujú z okuláru ako zväzok rovnobežných lúčov s priemerom $D = 8,0$ mm.

Na zobrazenie predmetu použijeme ako detektor digitálny fotoaparát s objektívom s ohniskovou vzdialenosťou $f_3 = 35$ mm a CCD čipom. Vzdialenosť objektívu fotoaparátu od okuláru mikroskopu $d = 50$ mm. Bod P predmetu na osi sústavy, na ktorý je mikroskop zaostrený, sa zobrazí ako bod D na osi sústavy na povrchu CCD čipu fotoaparátu.

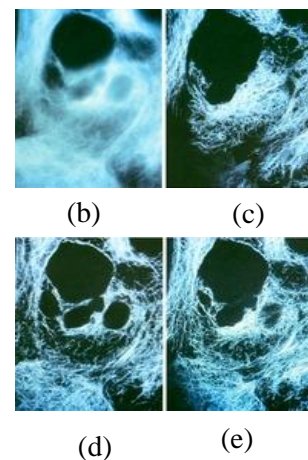
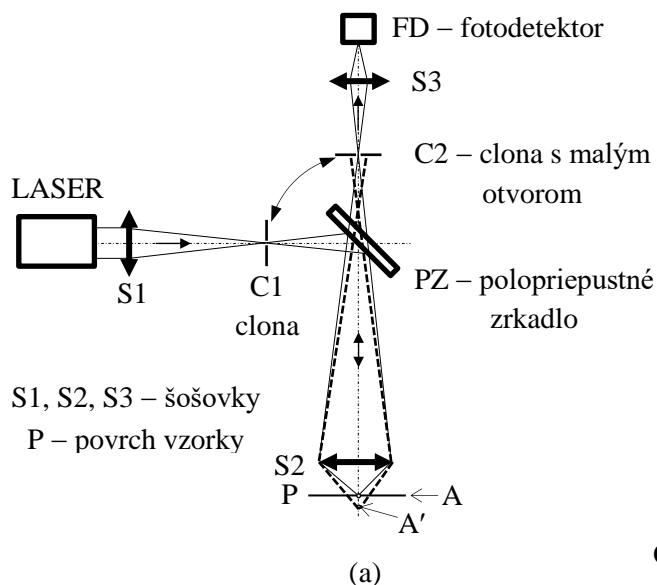
- a) Nakreslite schému optickej sústavy zaostreného mikroskopu s detektorom. Do schémy zakreslite bod P v predmetovej rovine objektívu mikroskopu na osi sústavy a prechod lúčov vychádzajúcich z bodu P až po dopad do bodu D v obrazovej rovine detektora.
- b) Určte predmetovú vzdialenosť a bodu P od objektívu zaostreného mikroskopu, aby boli splnené uvedené podmienky na výstupe mikroskopu.
- c) Uvažujte bod P' skúmanej vzorky na osi sústavy vo vzdialenosti $b = a + \Delta a$, kde $\Delta a = 100 \mu\text{m}$, od objektívu (mikroskop pritom zostáva zaostrený na predmetovú vzdialenosť a). Do schémy z časti a) zakreslite čiarkovane alebo inou farbou chod lúčov sústavou a ukážte, že obrazom bodu P' v obrazovej rovine detektora je kruhová plocha s priemerom δ . Túto plochu vyznačte v schéme sústavy a hodnotu δ určte výpočtom.

Pri pozorovaní 3D objektu sa ostro zobrazia body z roviny zaostrenia, ale body pod alebo nad touto rovinou vytvárajú v detekčnej rovine vzájomne sa prekrývajúce plôšky, ktoré obraz rozmazávajú. Problém neostreho obrazu odstraňuje *konfokálny mikroskop*, ktorého schéma je na obr. A-2 (a). Signál fotodetektora FD je priamoúmerný intenzite svetla odrazeného/rozptýleného v bode A vzorky, na ktorý je mikroskop zaostrený. Clony sú veľmi malé otvory, ktoré prepúšťajú iba lúče zaostrené na tieto otvory. Obraz povrchu sa získava skenovaním bod po bode pohybom vzorky vo vodorovnej rovine v smeroch x, y . Na obr. A-2 sú znázornené snímky defektu na povrchu kože. Snímka (b) je z bežného mikroskopu, snímky (c) až (e) sú získané konfokálnym mikroskopom zaostreným na tri rôzne predmetové roviny.

d) Odpovedzte na nasledujúce otázky:

- prečo dostávame ostrý obraz iba z jednej roviny 3D vzorky,
- prečo sú snímky z konfokálneho mikroskopu ostrejšie ako z bežného,
- ako sa dá zmeniť predmetová rovina, na ktorú je mikroskop zaostrený,
- prečo je na osvetlenie vzorky potrebný laser?

Šošovky považujte za tenké, ich hrúbku neuvažujte.



Obr. A-2

4. Štiepenie jadra ^{235}U

V jadrových elektrárnách sa používa ako palivo urán ^{235}U , ktorý sa v prírode vyskytuje spolu s izotopom ^{238}U vo forme rudy s názvom uraninit (smolinec), chemicky oxid uraničitý UO_2 . Hmotnostné zastúpenie izotopu ^{235}U v rude $p_1 = m_{\text{U}235}/m = 0,0072$, zvyšok $1 - p_1 = 0,9928$ je zastúpenie ^{238}U . Pre energetické účely (palivové články) výrobca obohacuje urán na hmotnostný pomer $p_2 = m_{\text{U}235}/m = 0,035$. Zvyšok $1 - p_2 = 0,965$ je hmotnostné zastúpenie izotopu ^{238}U .

- a) Označte T_1 polčas premeny izotopu ^{235}U a T_2 polčas premeny izotopu ^{238}U . Určte aktivitu A_1 rudy s hmotnosťou $m = 42 \text{ t}$ a aktivitu A_2 obohateného paliva s rovnakou hmotnosťou m .

V jadrovom reaktore sa používajú palivové články UO_2 (oxid uraničitý) s obohateným uránom s pomerom p_2 . Štiepny izotop ^{235}U sa štiepi na rôzne dvojice sesterských jadier. Uvažujte štiepenie jadra ^{235}U pomalým (tepelným) neutrónom na jadrá ^{139}Ce a ^{95}Zr .

- b) Napíšte rovnicu uvedeného štiepenia ^{235}U , pri ktorom sa okrem sesterských jadier uvoľňujú aj rýchle neutróny.
- c) Určte energiu E_1 , ktorá sa uvoľní pri tomto štiepení jadra ^{235}U . Energiu E_1 vyjadrite v jednotkách MeV.
- d) Určte celkovú energiu E_2 , ktorá by sa získala z palivovej náplne UO_2 reaktora s hmotnosťou $m = 42 \text{ t}$ za predpokladu premeny štiepením celého obsahu ^{235}U v palive. Určte dobu t_2 , po ktorú by reaktor dodával tepelný výkon $P = 1,5 \text{ GW}$, ak predpokladáme premenu celkovej energie E_2 štiepenia na teplo.
- e) Určte aktivitu A_3 vyhorenej palivovej náplne reaktora s hmotnosťou $m = 42 \text{ t}$, ak sa v nej všetok ^{235}U premenil na uvedené štiepne produkty.

Neutróny, ktoré vznikajú pri štiepnej reakcii, majú kinetickú energiu približne $E_3 = 2,0 \text{ MeV}$. Na štiepenie ďalších jadier ^{235}U ich však treba spomaliť, čo zabezpečuje grafitový moderátor. Postupnými zrážkami s jadrami ^{12}C moderátora kinetická energia neutrónov klesá, až dosiahne hodnoty vhodné pre štiepenie jadier ^{235}U .

- f) Neutrón s energiou E_3 sa pružne zrazí s jadrom atómu uhlíka ^{12}C (grafitový moderátor). Predpokladajte, že jadro uhlíka bolo pred zrážkou v pokoji a neutrón sa odchýli od pôvodného smeru pohybu o uhol α . Vyjadrite pomer $r = E_4/E_3$ energie E_4 neutrónu po zrážke a E_3 pred zrážkou ako funkciu uhlu rozptylu α a určte jeho minimálnu hodnotu r_{min} .

Pri výpočtoch použite hodnoty: hmotnosti jadier $m_{\text{Ce}139} = 138,907 \text{ u}$, $m_{\text{Zr}95} = 94,908 \text{ u}$, $m_{\text{U}235} = 235,044 \text{ u}$, $m_{\text{C}12} = 12,0 \text{ u}$, $m_{\text{O}16} = 16,0 \text{ u}$, hmotnosť neutrónu $m_n = 1,0087 \text{ u}$, atómová hmotnostná jednotka $u = 1,6605 \times 10^{-27} \text{ kg}$, rýchlosť šírenia svetla vo vákuu $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, Avogadrova konštanta $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, polčasy premeny $T_1 = 703,8 \text{ mil. r}$, $T_2 = 4,47 \text{ mld. r}$, $T_{\text{Ce}139} = 137,6 \text{ d}$, $T_{\text{Zr}95} = 64,03 \text{ d}$, $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$, $1 \text{ r} = 365,25 \text{ d}$.