

59. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2017/2018
Kategória A – domáce kolo
Riešenie úloh

1. Temná hmota vo vesmíre

Riešenie:

- a) Keďže temná hmota je dokonale priehľadná (nie je vidieť), predpokladajme, že jej hustota ρ_2 je podstatne menšia ako hustota ρ_1 jadra. Pohyb hviezd na okraji jadra teda ovplyvňuje iba hmotnosť jadra.

Z rovnice rovnováhy zotrvačnej a gravitačnej sily v gravitačnom poli mimo guľovo symetrického telesa (jadra galaxie) s hmotnosťou M_1

$$\frac{v_0^2}{r_1} = G \frac{M_1}{r_1^2}$$

určíme hmotnosť jadra galaxie

$$M_1 = \frac{r_1 v_0^2}{G}. \text{ Pre dané hodnoty } M_1 \approx 1,1 \times 10^{41} \text{ kg.} \quad (1) \quad 2 \text{ b}$$

- b) Stredná hustota jadra galaxie

$$\rho_1 = \frac{M_1}{(4/3)\pi r_1^3} = \frac{3v_0^2}{4\pi G r_1^2}. \text{ Pre dané hodnoty } \rho_1 \approx 1,35 \times 10^{-20} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

- c) Ak uvažujeme tmavú hmotu guľovo symetricky rozloženú v galaxii, je gravitačné pole vo vzdialenosti r od stredu galaxie dané hmotnosťou $M_1 + m(r)$, kde $m(r)$ je hmotnosť tmavej hmoty vo vnútri gule s polomerom r . Pre rovnováhu zotrvačnej a gravitačnej sily platí

$$\frac{v_0^2}{r} = G \frac{M_1 + m(r)}{r^2}, \text{ resp. } v_0^2 r = G [M_1 + m(r)] \text{ pre } r \geq r_1.$$

Túto funkciu môžeme diferencovať podľa polomeru. V nej sú premenné iba r a m , a teda

$$v_0^2 dr = G dm.$$

Hmotnosť dm vrstvy s polomerom $(r, r+dr)$

$$dm = \rho_2 4\pi r^2 dr$$

a po dosadení za dm do predchádzajúceho výrazu máme

$$v_0^2 dr = G \rho_2 4\pi r^2 dr.$$

Z toho hustota tmavej hmoty, ako funkcia r , je

$$\rho_2(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2} \text{ pre } r \geq r_1. \quad 2,5 \text{ b}$$

Najväčšia hustota tmavej hmoty je na povrchu jadra s polomerom r_1

$$\rho_2(r_1) = \frac{v_0^2}{4\pi G r_1^2}. \text{ Pre dané hodnoty } \rho_2(r_1) \approx 4,51 \times 10^{-21} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}. \quad 0,5 \text{ b}$$

- d) Hmotnosť temnej hmoty určíme integráciou. Keďže predpokladáme, že temná hmota je rozložená okolo jadra symetricky vzhľadom na stred jadra, možno hmotnosť tenkej guľovej vrstvy temnej hmoty vyjadriť

$$dm = 4\pi r^2 \rho_2 dr = \frac{v_0^2}{G} dr$$

a integráciou

$$M_2 = \int_{M_2} dm = \int_{r_1}^{r_2} \frac{v_0^2}{G} dr = \frac{v_0^2}{G} (r_2 - r_1) = \frac{v_0^2}{G} 6 r_1. \quad (2) \quad 2,5 \text{ b}$$

Hľadaný pomer hmotností určíme z vypočítaných veličín (1) a (2)

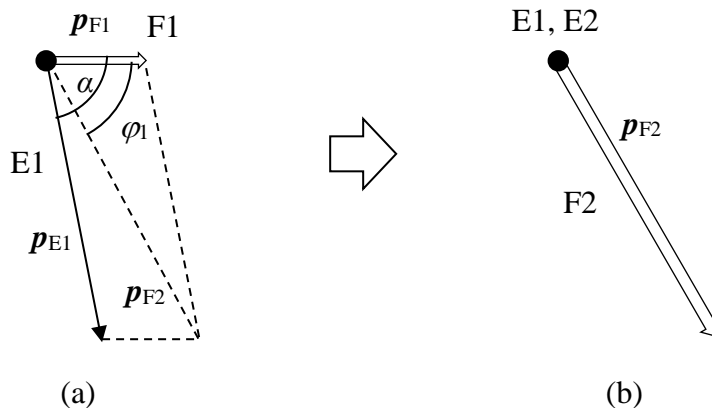
$$\frac{M_2}{M_1} = 6. \quad 0,5 \text{ b}$$

Pozn.: Podľa posledných meraní predstavuje bežná pozorovaná hmot iba približne 4 %, temná hmotá 23 % a zvyšok 73 % hmotnosti vesmíru predstavuje hmotnosť tzv. „temnej energie“. Pomer hmotností bežnej a temnej hmoty je teda približne 1/6. Výsledok našej úlohy zodpovedá tomuto pomeru.

2. Inverzný Comptonov jav

Riešenie:

- a) Interakciu považujeme za zrážku dvoch mechanických častíc. Pri takej interakcii sú splnené zákony zachovania energie a zachovania hybnosti.



Obr. RA-1

Obr. RA-1

1 b

Na obr. RA-1 (a) vektory hybností p_{F1} a p_{F2} zvierajú uhol $\varphi_1 = 60^\circ$. Keďže elektrón odovzdá svoju energiu fotónu, musí byť energia aj hybnosť fotónu F2 väčšia ako hybnosť

fotónu F1. Výsledná zložka hybnosti elektrónu a fotónu pred zrážkou je rovná zložke hybnosti fotónu F2 po zrážke. Pre veľké hodnoty p_{e1} sa uhol α blíži hodnote φ_1 . Keďže $p_{F2} > p_{F1}$, musí byť uhol $60^\circ < \alpha < 120^\circ$ (120° pre rovnostranný trojuholník). 1 b

- b) Ako vidno z obrázku, hybnosť p_{e1} elektrónu je porovnateľná s hybnosťou $p_{F2} = h / \lambda_2$ fotónu. Elektrónu s takouto hodnotou hybnosti by zodpovedala, podľa klasického vzťahu, rýchlosť

$$v_{E1} = \frac{h}{\lambda_2 m_0}, \text{ pre dané hodnoty } v_{E1} \approx 5,82 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} > c.$$

Keďže klasicky vypočítaná rýchlosť elektrónu je väčšia ako rýchlosť c svetla vo vákuu, musíme zrážku riešiť s použitím relativistických vzťahov pre hmotnosť m , hybnosť p a celkovú energiu E elektrónu 1 b

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \quad p = m v, \quad E = m c^2,$$

kde m_0 je pokojová hmotnosť elektrónu.

S použitím týchto vzťahov možno odvodiť užitočný vzťah medzi energiou E a hybnosťou p elektrónu

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

Pri zrážke sa zachováva hybnosť sústavy. Pre zložku v pôvodnom smere a v smere kolmom platí

$$p_e \cos \alpha = p_{F2} \cos \varphi_1 - p_{F1} \quad (1)$$

$$p_e \sin \alpha = p_{F2} \sin \varphi_1. \quad (2)$$

Podľa zákona zachovania energie

$$E_{F1} + E_e = E_{F2} + E_{e0}, \text{ resp.} \\ p_{F1} c + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4} = p_{F2} c + m_0 c^2. \quad (3)$$

Z rovníc (1) a (2) vylúčime uhol α (súčet druhých mocnín rovníc a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$)

$$p_e^2 = (p_{F2} \cos \varphi_1 - p_{F1})^2 + (p_{F2} \sin \varphi_1)^2 \quad (4)$$

a rovnicu (3) upravíme na tvar

$$p_e^2 = (p_{F2} - p_{F1})^2 + 2c m_0 (p_{F2} - p_{F1}). \quad (5)$$

Z rovníc (4) a (5) vylúčime hybnosť elektrónu a po úprave dostaneme

$$\frac{1}{p_{F1}} = \frac{1}{p_{F2}} + \frac{1}{m_0 c} (1 - \cos \varphi_1). \quad (6)$$

Ak vyjadríme hybnosť pomocou vlnovej dĺžky $p = h / \lambda$, máme

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi_1). \text{ Pre dané hodnoty } \lambda_1 \approx 2,46 \times 10^{-12} \text{ m.} \quad 2 \text{ b}$$

- c) Z rovníc (4) a (6) určíme hybnosť p_e elektrónu pred zrážkou

$$p_e^2 = p_{F1}^2 + p_{F2}^2 - 2 p_{F1} p_{F2} \cos \varphi_1. \quad (7)$$

V urýchľovači s napätím U vykoná elektrické pole prácu $W = e U$, ktorá je rovná získanej kinetickej energii elektrónu

$$E_k = E - E_0 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 = e U.$$

Odtiaľ máme

$$U = \frac{c}{e} \left(\sqrt{p_{F1}^2 + p_{F2}^2 - 2 p_{F1} p_{F2} \cos \varphi_1 + m_0^2 c^2} - m_0 c \right),$$

resp.

$$U = \frac{hc}{e} \left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} - 2 \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \cos \varphi_1 + \left(\frac{m_0 c}{h} \right)^2} - \frac{m_0 c}{h} \right). \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $U \approx 490 \text{ kV}$.

- d) Uhol α určíme napr. z rovníc (2) a (7)

$$\sin \alpha = \frac{p_{F2}}{p_e} \sin \varphi_1 = \frac{p_{F2}}{\sqrt{p_{F1}^2 + p_{F2}^2 - 2 p_{F1} p_{F2} \cos \varphi_1}} \sin \varphi_1,$$

resp.

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 2 \lambda_1 \lambda_2 \cos \varphi_1}} \sin \varphi_1. \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $\sin \alpha \approx 1,00$, a teda $\alpha \approx 90^\circ$.

Zväzok urýchlených elektrónov je kolmý na smer pohybu fotónu $F1$.

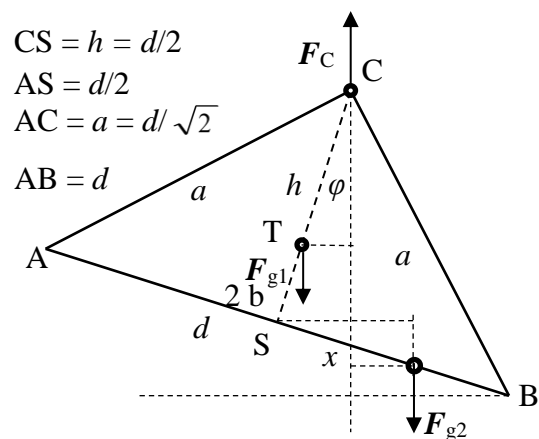
- e) Vlnová dĺžka de Broglieho vlny elektrónu $\lambda_e = h / p_e$. S použitím rovnice (7)

$$k = \frac{\lambda_e}{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} - 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cos \varphi_1}}. \text{ Pre dané hodnoty } k \approx 0,59. \quad 1 \text{ b}$$

3. Kmity rámu s telieskom

Riešenie:

- a) V stave rovnováhy pôsobia na sústavu sily F_{g1} – tiažová sila pôsobiaca na rám, ktorá má pôsobisko v ťažisku T rámu, F_{g2} – tiažová sila pôsobiaca na teliesko a F_C – sila pôsobiaca v závесе, obr. RA–2.
- b) Ak je teliesko uprostred základne ($x = 0$), má os CS trojuholníka zvislý smer. Pri posunutí telieska do vzdialenosti x od stredu S sa os CS vychýli o uhol φ , pričom v rovnováhe je výslednica momentov síl nulová. Pre



Obr. RA–2

momenty síl vzhľadom na os prechádzajúcu vrcholom C máme rovnicu

$$F_{g1} \frac{2}{3} h \sin \varphi = F_{g2} (x \cos \varphi - h \sin \varphi), \quad 1 \text{ b}$$

$$\text{resp. } \left(\frac{m_1}{3} + \frac{m}{2} \right) g d \sin \varphi - m g x \cos \varphi = 0, \quad (1)$$

kde $h = d/2$ je výška trojuholníka. Ťažisko T samotného trojuholníka, ako je známe, sa nachádza v $2/3$ výšky od vrcholu C.

Pre uhol φ máme

$$\tan \varphi = \frac{6m}{2m_1 + 3m} \frac{x}{d}, \text{ resp. } \varphi = \arctan \left(\frac{6m}{2m_1 + 3m} \frac{x}{d} \right) = f_1(x) \text{ pre } |x| \leq \frac{d}{2}. \quad 2 \text{ b}$$

- c) Ak sa rám vychýli z rovnovážnej polohy o uhol β v kladnom smere, zmení sa uhol φ na $\varphi - \beta$. Vzniká tak nenulový moment sily vzhľadom na os prechádzajúcu vrcholom C a po uvoľnení sa začne pohybovať otáčavým pohybom okolo osi C.

Najprv určíme moment zotrvačnosti vzhľadom na os C. Rám s dĺžkou $d + 2a$ rozdelíme na preponu s hmotnosťou m_p a odvesny s hmotnosťou $2m_o$, kde

$$m_p = m_1 \frac{d}{d + 2a}, \quad m_o = m_1 \frac{a}{d + 2a}.$$

Moment zotrvačnosti je súčtom momentov zotrvačnosti jednotlivých častí

$$I = \frac{1}{12} m_p d^2 + m_p \left(\frac{d}{2} \right)^2 + 2 \left[\frac{1}{12} m_o a^2 + m_o \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] + m \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 + x^2 \right]$$

a po dosadení za a a úprave

$$I = \frac{m_1}{3\sqrt{2}} d^2 + m \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 + x^2 \right].$$

Moment sily vzhľadom na os C pri výchylke β z rovnovážnej polohy

$$M = m_1 g \frac{d}{3} \sin(\varphi - \beta) - m g \left[x \cos(\varphi - \beta) - \frac{d}{2} \sin(\varphi - \beta) \right].$$

Pre malé výchylky $\beta \ll 1$ rad upravíme vzťah pre moment sily

$$M = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{m}{2} \right) g d (\sin \varphi - \beta \cos \varphi) - m g x (\cos \varphi + \beta \sin \varphi),$$

kde sa použili približné vzťahy pre malý uhol β : $\cos \beta \approx 1$, $\sin \beta \approx \beta$, a teda

$$\sin(\varphi - \beta) = \sin \varphi \cos \beta - \cos \varphi \sin \beta \approx \sin \varphi - \beta \cos \varphi$$

$$\cos(\varphi - \beta) = \cos \varphi \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta \approx \cos \varphi + \beta \sin \varphi.$$

Ak uvážime podmienku rovnováhy (1), máme

$$\begin{aligned}
M &= -g d \left[\left(\frac{m_1}{3} + \frac{m}{2} \right) \cos \varphi + m \frac{x}{d} \sin \varphi \right] \beta = \\
&= -g d \left[\left(\frac{m_1}{3} + \frac{m}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} + m \frac{x}{d} \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \right] \beta = \\
&= -\frac{g d}{\sqrt{1 + \left(\frac{6m}{2m_1 + 3m} \right)^2 \left(\frac{x}{d} \right)^2}} \left[\left(\frac{m_1}{3} + \frac{m}{2} \right) + m \frac{6m}{2m_1 + 3m} \left(\frac{x}{d} \right)^2 \right] \beta = \\
&= -g m d \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{m_1}{3m} \right)^2 + \left(\frac{x}{d} \right)^2} \beta = -D \beta,
\end{aligned}$$

1 b

kde D sme označili direkčný moment.

Pohybová rovnica kmitov rámu spolu s telieskom má potom tvar

$$\varepsilon = -\frac{D}{I} \beta = -\omega^2 \beta, \text{ kde } \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{I}}.$$

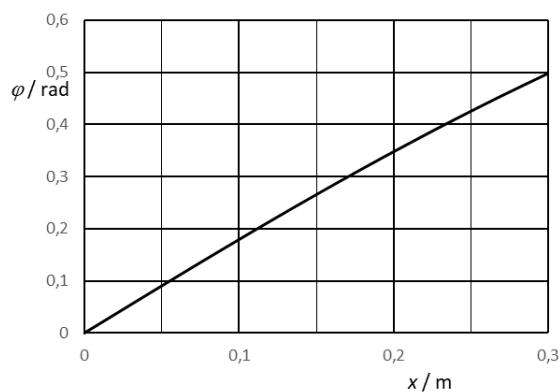
Periódka kmitov

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{d \left(\frac{1}{4} + \frac{m_1}{3\sqrt{2}m} \right) + \left(\frac{x}{d} \right)^2}{g \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{m_1}{3m} \right)^2 + \left(\frac{x}{d} \right)^2}}} = f_2(x).$$

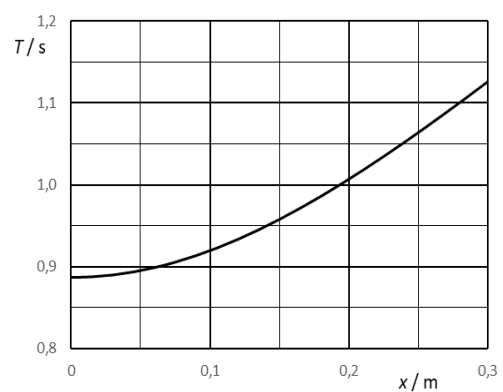
2 b

d) Grafy funkcií $f_1(x)$, $f_2(x)$

1 + 1 b



Obr. RA-3



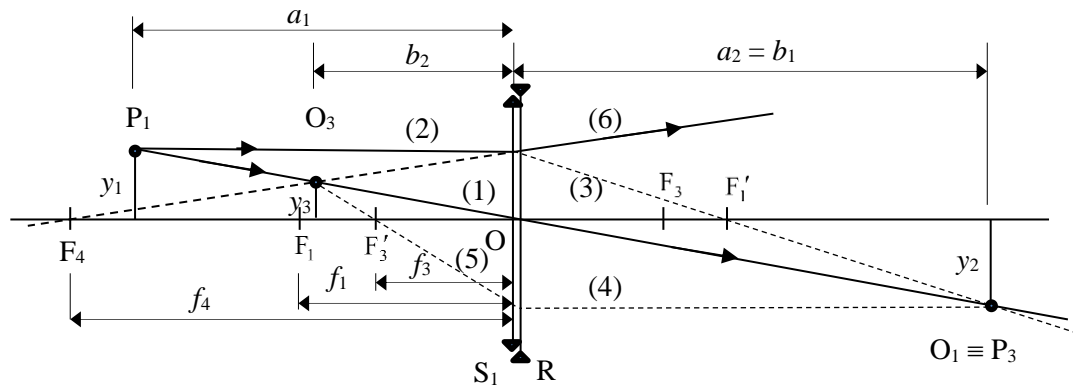
Obr. RA-4

4. Transfokátor (ZOOM)

Riešenie:

a) Obr. RA-5

1 b



Obr. RA-5, $x = 0$

Šošovky S1 a R sú tesne pri sebe, ohniská spojky sú F_1 (predmetové) a F_1' (obrazové), ohniská rozptylky sú F_3 (predmetové) a F_3' obrazové. Veľkosti ohniskových vzdialeností f_1 a f_3 sú vzdialenosti ohnísk od roviny šošoviek. Predmet P_1 je v predmetovej vzdialenosti a_1 od spojky. Najprv hľadáme obraz O_1 predmetu pomocou spojky. Použijeme lúč (1) stredom šošovky a (2), ktorý sa spojkou láme (3) do obrazového ohniska. V priesečníku (1) a (3) sa nachádza obraz O_1 vytvorený spojkou. Je prevrátený a skutočný.

Obraz O_1 je predmetom pre rozptylku R. Lúč (1) postupuje v opačnom smere cez stred šošovky R. Lúč (4) rovnobežný s osou sa láme do obrazového ohniska F_3' , lúč (5). Obraz O_3 je na priesečníku lúčov (1) a (5). Obraz je priamy a neskutočný. Lúče prechádzajú sústavou šošoviek tak, ako keby vychádzali z obrazu O_3 . Lúč (2) vstupujúci do sústavy ako rovnobežný s osou pokračuje za sústavou ako lúč (6) prechádzajúci obrazom O_3 . Priesečník tohto lúča s optickou osou je ohnisko F_4 sústavy a jeho vzdialenosť od roviny šošoviek je ohnisková vzdialenosť sústavy. Podľa situácie na obrázku predstavuje sústava šošoviek rozptylku. Pre predmet P_1 sústavy a obraz O_3 platí zobrazovacia rovnica tenkej šošovky

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_2} = -\frac{1}{f_4},$$

pre spojku S1 a rozptylku R

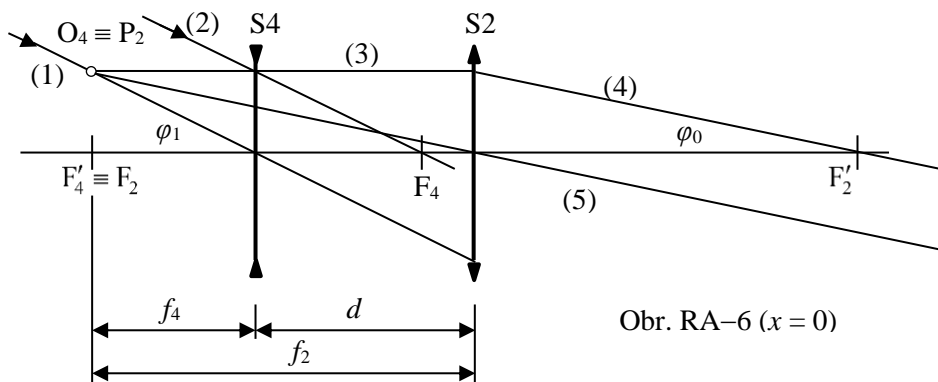
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f_1} \quad \text{a} \quad -\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} = -\frac{1}{f_3}.$$

Z uvedených rovníc ($b_1 = a_2$) dostávame vzťah pre ohniskovú vzdialenosť sústavy

$$\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_3} = -\frac{1}{f_4}, \text{ resp. } f_4 = \frac{f_1 f_3}{f_1 - f_3}. \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

Obr. RA-6

1 b



Obr. RA-6 ($x = 0$)

Sústavu šošoviek S1–R nahradíme jednou šošovkou S4, ktorú budeme považovať za rozptylku. Zo zväzku rovnobežných dopadajúcich lúčov vyberieme dva charakteristické, jeden (1) prechádzajúci cez stred spojených šošoviek S4, ktorý je totožný s obrazovým lúčom, a lúč (2) prechádzajúci predmetovým ohniskom F_4 , ktorého obrazovým lúčom je rovnobežka (3) s osou, prechádzajúca priesečníkom lúča (2) a roviny šošovky. Obraz O_4 je v priesečníku lúčov (1) a (3). Obraz je priamy a neskutočný. Obraz O_4 je predmetom pre šošovku S2. Ak majú byť obrazové lúče spojky S2 rovnobežné (lúče (4), (5)), musí byť predmet v ohniskovej rovine. Ak je S4 rozptylka, je splnená podmienka pre neprevrátený obraz – dopadajúce lúče zvierajú s osou uhol φ_1 a prechádzajúce uhol φ_0 v rovnakom smere. Keby sme považovali S4 za spojku, došlo by k prevráteniu obrazu (o čom sa možno presvedčiť jednoduchou konštrukciou).

Ak má byť S4 rozptylka, musí byť ohnisková vzdialenosť $-f_4 < 0$, tzn. $f_1 > f_3$.

Taktiež platí vzt'ah, obr. RA-6, $d = f_2 - f_4$.

$$(2)$$

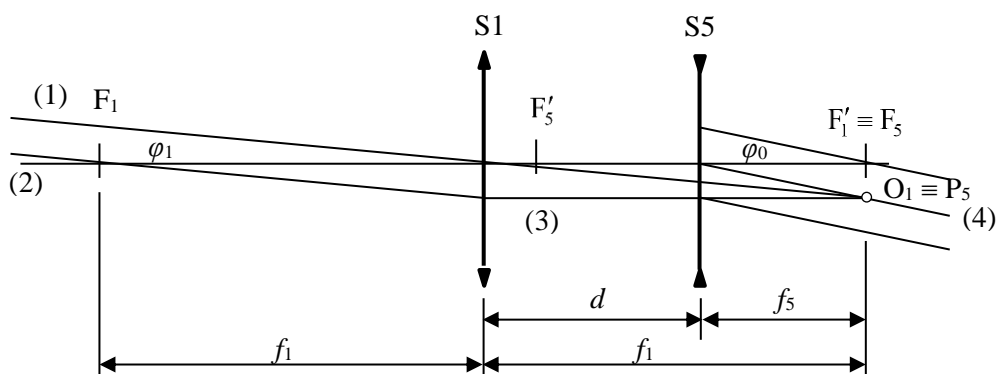
1 b

- b) V tomto prípade je situácia rovnaká ako v prípade a). Ohniskovú vzdialenosť sústavy R–S2 analogicky máme ako v prípade (1)

$$f_5 = \frac{f_2 f_3}{f_2 - f_3}. \quad (3)$$

Obr. RA-7

1 b



Obr. RA-7 ($x = d$)

Zväzok rovnobežných lúčov, napr. (1), (2) po prechode spojkou S1 vytvára skutočný obraz O_1 v ohniskovej rovine. Lúč (1) prechádzajúci stredom šošovky S1 sa neláme, lúč (2) idúci ohniskom F_1 sa láme rovnobežne s osou, lúč (3). Obraz O_1 je priesečník lúčov (1) a (3). Tento obraz je súčasne predmetom P_5 pre sústavu S5 šošoviek R–S2. Ak majú

byť obrazové lúče šošovky S5 rovnobežné, musí sa predmet P₅ nachádzať v ohniskovej rovine sústavy S5. Lúč (4) prechádzajúci stredom S5 sa neláme a ukazuje smer vystupujúcich rovnobežných lúčov. Chod lúčov podľa obr. RA-7 vyžaduje, aby S5 bola rozptylka, tzn. $-f_5 < 0$, a teda $f_2 > f_3$

Z obrázku vidíme, že musí byť splnená podmienka $d = f_1 - f_5$. (4) 1 b

- c) Keďže v vzdialenosť d šošoviek S1 a S2 je pevná, tzn. v prípadoch a) a b) rovnaká, z (2) a (4) dostaneme

$$f_1 - f_5 = f_2 - f_4$$

a po dosadení za ohniskové vzdialenosti f_4 a f_5 z a) a b) – výrazy (1), (3),

$$f_1 - \frac{f_2 f_3}{f_2 - f_3} = f_2 - \frac{f_1 f_3}{f_1 - f_3}.$$

Rovnicu upravíme na tvar

$$(f_1 f_2 - f_1 f_3 - f_2 f_3)(f_1 - f_2) = 0$$

Existujú dve riešenia: $f_1 = f_2$ a $\frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = f_3$.

Ako sa ukáže ďalej, fyzikálny význam má iba riešenie $f_1 = f_2$. 1 b

Z obrázkov RA-6 a RA-7 vidno, že v prvom prípade $x = 0$ je medzný uhol maximálny $\varphi_{1 \max}$ a v druhom prípade $x = d$ minimálny $\varphi_{1 \min}$.

V obrázku RA-6 vidíme

$$\frac{\tan \varphi_{1 \max}}{\tan \varphi_0} = \frac{f_2}{f_4} = \frac{f_2}{f_2 - d} = \frac{1}{1 - d/f_2} > 1.$$

V obrázku RA-7 vidno

$$\frac{\tan \varphi_{1 \min}}{\tan \varphi_0} = \frac{f_5}{f_1} = \frac{f_1 - d}{f_1} = 1 - d/f_1 < 1.$$

Pre $f_1 = f_2$ máme

$$\frac{\tan \varphi_{1 \max}}{\tan \varphi_{1 \min}} = \frac{1}{(1 - d/f_1)^2} = n, \text{ odkiaľ } d = f_1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Z podmienky $d = f_1 - f_5$ a $f_1 = f_2$

$$d = f_1 - \frac{f_2 f_3}{f_2 - f_3} = f_1 - \frac{f_1 f_3}{f_1 - f_3} = f_1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \text{ určíme } f_3 = \frac{f_1}{1 + \sqrt{n}}. \quad 1 b$$

Pre druhé riešenie po dosadení za f_4 a f_5 dostaneme

$$\frac{\tan \varphi_{1 \max}}{\tan \varphi_{1 \min}} = 1, \text{ čo nezodpovedá požiadavke úlohy.}$$

- d) Ohniskové vzdialenosti sú

$$f_1 = f_2 = \frac{d}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}. \text{ Pre dané hodnoty } f_1 = f_2 \approx 9,5 \text{ cm.} \quad 1 b$$

$$f_3 = \frac{f_1}{1 + \sqrt{n}} = d \frac{\sqrt{n}}{n-1}. \text{ Pre dané hodnoty } f_3 \approx 3,5 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

5. Elektrický mostíkový filter

Riešenie:

Medzi uzly A, B sú zapojené dva paralelné deliče napätia A–D–B a A–C–B. Fázor výstupného napätia filtra $U_2 = U_{CB} - U_{DB}$, kde

$$U_{CB} = U_1 \frac{R_2}{R_2 + R_L + j\omega L}, \quad U_{DB} = U_1 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Komplexný napät'ový prenos

$$A_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_2 + R_L + j\omega L} - \frac{1}{1 + j\omega C R_1} = -\frac{R_L + j\omega(L - C R_1 R_2)}{(R_2 + R_L + j\omega L)(1 + j\omega C R_1)}.$$

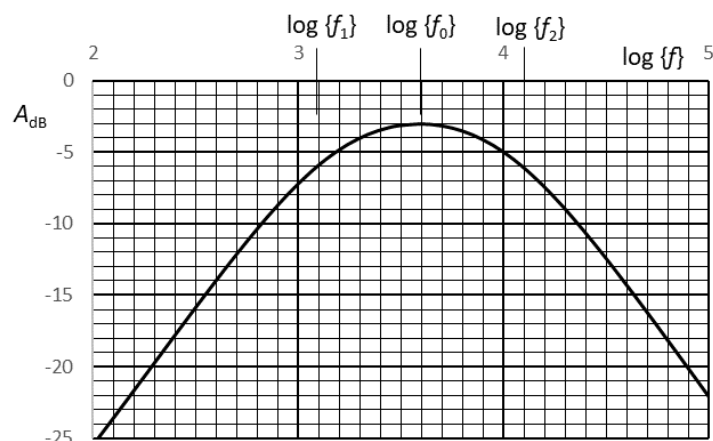
a) Amplitúdová frekvenčná charakteristika prenosu

$$A_U = |A_U| = \sqrt{\frac{R_L^2 + \omega^2(L - C R_1 R_2)^2}{[(R_2 + R_L)^2 + \omega^2 L^2][1 + \omega^2(C R_1)^2]}}. \quad 3 \text{ b}$$

b) Fázová frekvenčná charakteristika napät'ového prenosu

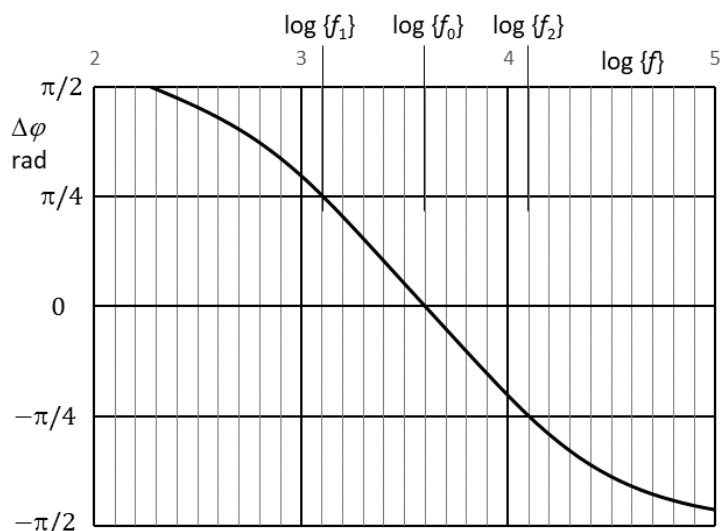
$$\varphi_U = \arg\left(\frac{U_2}{U_1}\right) = \pi + \arctan\left[\frac{\omega(L - C R_1 R_2)}{R_L}\right] - \arctan\left(\frac{\omega L}{R_2 + R_L}\right) - \arctan(\omega C R_1). \quad 3 \text{ b}$$

c) Grafy



Obr. RA-8 Amplitúdová charakteristika

1 b



Obr. RA-9 Fázová charakteristika

1 b

Najpresnejšie stanovenie rezonančnej frekvencie je z fázovej charakteristiky – v stave rezonancie je $\Delta\varphi = 0$. Z grafu určíme $\log \{f_0\} \approx 3,60$, odtiaľ $f_0 \approx 3,98$ kHz. Pri tejto frekvencii má A_{dB} maximum $-3,0$ dB. 1 b

Dolnú a hornú medznú frekvenciu určujeme na úrovni poklesu amplitúdy o 3 dB, tzn. na úrovni $A_{dB} = -6,0$ dB, alebo pri fázovom posunutí $\pm\pi/4$ rad. Pre medzné frekvencie máme $\log \{f_1\} \approx 3,09$, $\log \{f_2\} \approx 4,10$. Medzné frekvencie sú $f_1 \approx 1,3$ kHz, $f_2 \approx 11,8$ kHz, a teda šírka pásma prenosu filtra $\Delta f \approx 11,5$ kHz. 1 b

6. Rb-Sr datovanie nerastov

Riešenie:

a) Zloženie jadier

Nuklid	Nukleónov	Protónov	Neutrónov
^{86}Sr	86	38	48
^{87}Sr	87	38	49
^{87}Rb	87	37	50
^{39}K	39	19	20
^{40}Ca	40	20	20

$5 \times 0,2$ b

b) Rovnica premeny



Ide o β -premenu. Polčas tejto premeny $T = 4,88 \times 10^{10}$ roka. 1 b

c) Prvky K a Rb sa nachádzajú nad sebou v prvom stĺpci Mendelejevovej tabuľky prvkov – *alkalické kovy*, a vytvárajú v zlúčeninách jednomocné väzby. Podobne pri kryštalizácii môže dochádzať k ich vzájomnej substitúcii.

Prvky Ca a Sr sa nachádzajú nad sebou v druhom stĺpci Mendelejevovej tabuľky prvkov – *alkalické zeminy*, a vytvárajú v zlúčeninách dvojmocné väzby. Podobne pri kryštalizácii môže dochádzať k ich vzájomnej substitúcii. 1 b

d) Keďže je ^{87}Rb rádioaktívny, postupne jeho koncentrácia klesá podľa časovej závislosti

$$\left(^{87}\text{Rb}\right)_t = \left(^{87}\text{Rb}\right)_0 e^{-\lambda t}, \text{ kde } \lambda = \frac{\ln 2}{T} \text{ je konštanta premeny.} \quad 1 \text{ b}$$

Súčasne narastá počet premenou vznikajúcich jadier ^{87}Sr z pôvodného počtu $\left(^{87}\text{Sr}\right)_0$

$$\left(^{87}\text{Sr}\right)_t = \left(^{87}\text{Sr}\right)_0 + \left(^{87}\text{Rb}\right)_0 \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = \left(^{87}\text{Sr}\right)_0 + \left(^{87}\text{Rb}\right)_t \left(e^{\lambda t} - 1\right). \quad 1 \text{ b}$$

Ak uvážime, že počet jadier ^{86}Sr vo vzorke sa časom nemení, tzn. $\left(^{86}\text{Sr}\right)_t = \left(^{86}\text{Sr}\right)_0$, pre hľadané pomery potom máme rovnicu

$$\left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)_t = \left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)_0 + \left(\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{Sr}}\right)_t \left(e^{\lambda t} - 1\right), \quad 1 \text{ b}$$

ktorá sa nazýva *rovnica izochrony*.

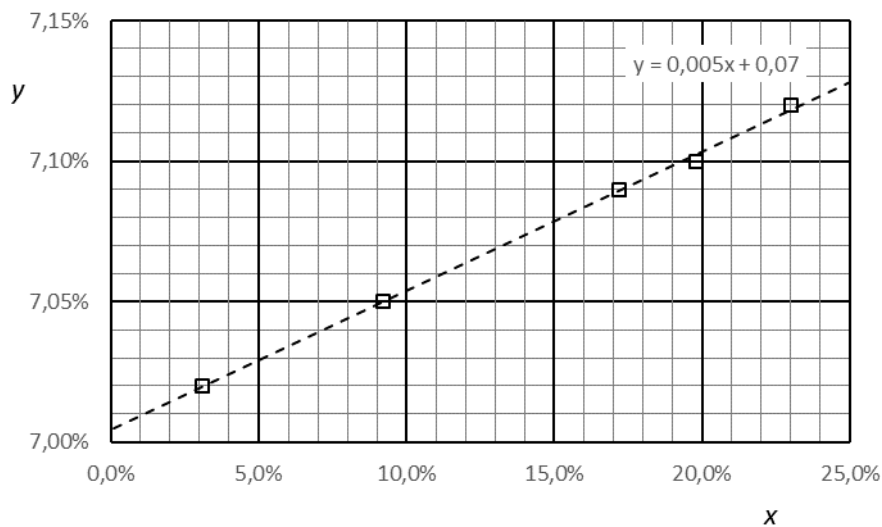
Po zavedení premenných

$$y = \left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)_t \quad x = \left(\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{Sr}}\right)_t$$

tak dostávame rovnicu priamky

$$y = kx + y_0, \text{ kde smernica priamky } k = e^{\lambda t} - 1 \text{ pre daný čas merania } t.$$

e) Pre uvedené namerané hodnoty zostrojíme graf izochrony.



Obr. RA–10 Graf izochrony

1 b

Nameranými bodmi preložíme optimálnu priamku (lineárna regresia)

$$y = 0,00495 x + 0,07004.$$

1 b

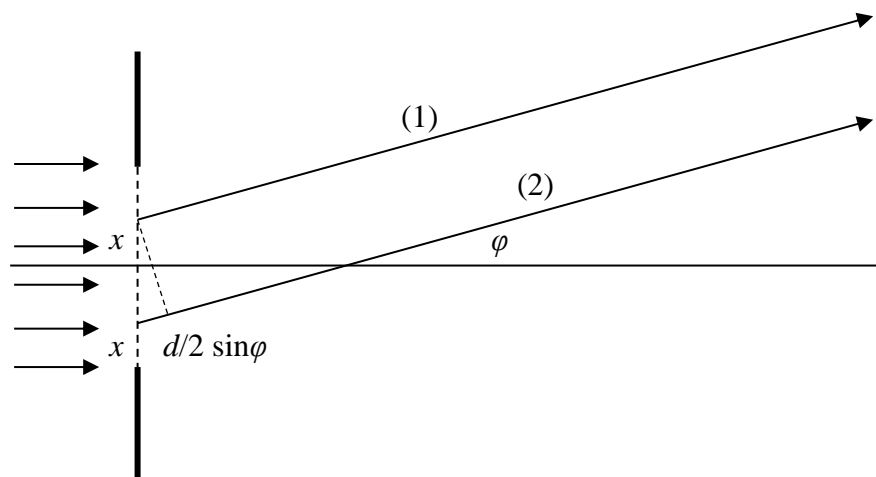
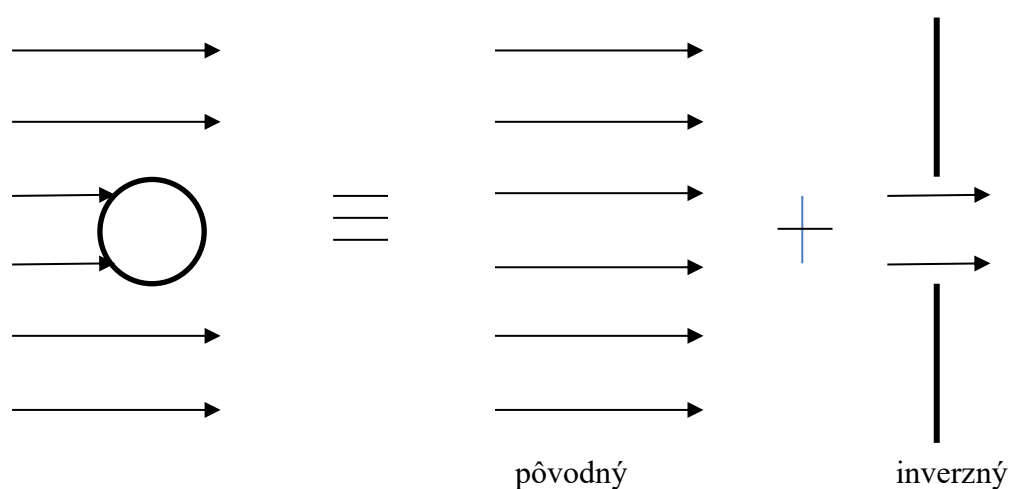
Pozn.: Použitá lineárna regresia na kalkulačke.

Z parametrov regresnej priamky máme:

$$\left(\frac{{}^{87}\text{Sr}}{{}^{86}\text{Sr}} \right)_0 = 7,00 \% \quad 0,5 \text{ b}$$

$$k = e^{\lambda t} - 1 = 0,00495, \text{ odkiaľ } t = \frac{T}{\ln 2} \ln(k + 1) \approx 350 \text{ mil. rokov.} \quad 0,5 \text{ b}$$

7. Meranie hrúbky vlasu – experimentálna úloha



Lúč dopadá na vlas a časť toku svetla vlas zatieni. Prechádzajúce svetlo možno považovať za superpozíciu svetelného toku bez vlasu + svetlo s opačnou fázou (odčíta sa od pôvodného svetla) prechádzajúce cez štrbinu s šírkou rovnou hrúbke vlasu. Pôvodný svetlený tok vytvorí na tienidle obraz prierezu lúča, tok prechádzajúci štrbinou vytvorí na tienidle difrakčný obrazec.

Lúče prechádzajúce štrbinou s šírkou d možno rozdeliť na dvojice lúčov vychádzajúce z miest so vzdialenosťou $d/2$ (lúče (1) a (2)). Výsledný tok pod uhlom φ vzhľadom na os je daný superpozíciou týchto dvojíc. Ak je v dvojici rozdiel optických dráh $(d/2) \sin\varphi = n\lambda$, vzniká interferenčné maximum, pre $(d/2) \sin\varphi = (2n+1)\lambda/2$ minimum.

Keďže $\varphi \ll 1$ rad, $\sin\varphi \approx \tan\varphi = y/L$, kde y je vzdialenosť stopy maxima od stredu nulového lúča a L vzdialenosť tienidla od vlasu.

Pre prvé maximum

$$y_1 = L \frac{2\lambda}{d}, \text{ odkiaľ } d = L \frac{2\lambda}{y_1}.$$

Čím je y_1 väčšie, tým presnejšie ho možno merať, presnosť rastie so zmenšovaním d . Metóda sa preto hodí na meranie veľmi malých priemerov vlákien.

Difrakčné maximum možno pozorovať, ak $\sin\varphi < 1$, tzn. $d > 2\lambda$. Táto podmienka obmedzuje použitie metódy. Pri meraní jemných vlákien je výhodnejšie použiť modré svetlo s kratšou vlnovou dĺžkou, pre vlas postačuje červené svetlo.

59. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie A

Autori úloh:	Lubomír Konrád 1, 2, Ivo Čáp 3 až 7
Recenzia a úprava úloh:	Daniel Kluvanec, Lubomír Mucha
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017