

59. ročník Fyzikálnej olympiády  
v školskom roku 2017/2018  
Kategória B – domáce kolo  
Riešenie úloh

**1. Strel'ba z húfnice**

a) Ide o šikmý vrh, pre ktorý platia vzťahy pre súradnice pohybu vzhľadom na bod výstrelu

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad (1)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

Ak hodnotíme dostrel na vodorovnej rovine, sú súradnice bodu dopadu  $(x_m, 0)$ , teda

$$x_m = v_0 t_0 \cos \alpha, \quad 0 = v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_0^2.$$

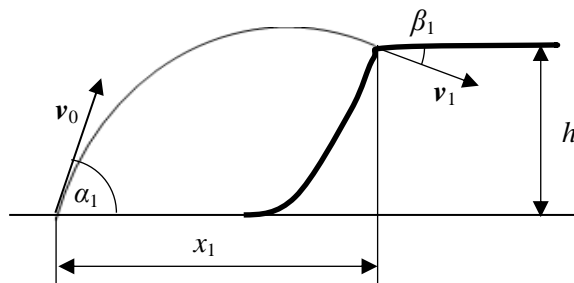
Odtiaľ určíme

$$t_0 = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha \quad \text{a} \quad x_m = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (3)$$

Maximálny dostrel  $x_m$  dosiahne húfnica, ako to vyplýva z výrazu (3), pri  $\alpha_0 = 45^\circ$ . Tomu zodpovedá rýchlosť výstrelu

$$v_0 = \sqrt{x_m g}. \quad \text{Pre dané hodnoty } v_0 \approx 66,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad 2 \text{ b}$$

b) Jednoduchý náčrtok, obr. RB–1 1 b



Obr. RB–1

c) Pri strel'be na kopec chceme zasiahnuť bod so súradnicami  $(x_1, h)$

$$x_1 = v_0 t_1 \cos \alpha_1 \quad (3)$$

$$h = v_0 t_1 \sin \alpha_1 - \frac{1}{2} g t_1^2. \quad (4)$$

Z rovníc vylúčime parameter  $t_1$  a dostaneme rovnicu pre premenné  $x_1$  a  $\alpha_1$ , ktoré chceme určiť pre optimálny prípad

$$h = x_1 \tan \alpha_1 - \frac{1}{2} \frac{g x_1^2}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha_1).$$

Ide o kvadratickú rovnicu pre  $\tan \alpha_1$ , z ktorej vyplýva, že pre každú vzdialenosť  $x_1$  dostávame za vhodných podmienok dve riešenia, tzn. vrchol možno zasiahnuť pri dvoch

rôznych uhloch výstrelu – pri menšom uhle sa cieľ zasiahne zdola, pri väčšom uhle zhora. Pri vzdalovaní miesta výstrelu, tzn. zväčšovaní  $x_1$  sa obidva uhly vzájomne približujú, až pri určitej vzdialenosti splynú – to zodpovedá dvojnásobnému riešeniu rovnice. Pri ďalšom zväčšení  $x_1$  už guľa na vrchol nadoletí pri žiadnom uhle výstrelu.

Ak upravíme kvadratickú rovnicu do základného tvaru

$$\tan^2 \alpha_1 - 2 \frac{v_0^2}{g x_1} \tan \alpha_1 + 1 + \frac{2v_0^2}{g x_1^2} h = 0$$

a vyjadríme jej riešenie

$$\tan \alpha_1 = \frac{v_0^2}{g x_1} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_1}\right)^2 - 1 - \frac{2v_0^2}{g x_1^2} h}.$$

Podmienke dvojnásobného riešenia zodpovedá nulová hodnota diskriminantu

$$D = \left(\frac{v_0^2}{g x_1}\right)^2 - 1 - \frac{2v_0^2}{g x_1^2} h = 0.$$

Z tejto rovnice určíme hľadanú vzdialenosť

$$x_1 = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{x_m(x_m - 2h)}. \text{ Pre dané hodnoty } x_1 \approx 260 \text{ m.} \quad 2 \text{ b}$$

d) Uhol výstrelu je potom daný vzťahom

$$\tan \alpha_1 = \frac{v_0^2}{g x_1} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}} = \sqrt{\frac{x_m}{x_m - 2h}}. \text{ Pre dané hodnoty } \alpha_1 \approx 60,0^\circ. \quad 1 \text{ b}$$

a čas letu gule

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0 \cos \alpha_1} = \frac{x_1}{v_0} \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_1} = \frac{\sqrt{2}}{g} \sqrt{v_0^2 - gh} = \sqrt{2 \frac{x_m - h}{g}}.$$

Pre dané hodnoty:  $t_1 \approx 7,82 \text{ s.}$  1 b

e) Vektor rýchlosti  $v_1$  v bode dopadu na vrchole kopca má zložky

$$v_{1x} = v_0 \cos \alpha_1$$

$$v_{1y} = v_0 \sin \alpha_1 - g t_1.$$

Veľkosť rýchlosti

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha_1 + (v_0 \sin \alpha_1 - g t_1)^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{g(x_m - 2h)}, \quad 1 \text{ b}$$

čo zodpovedá aj zachovaniu mechanickej energie gule.

Pre uhol dopadu platí

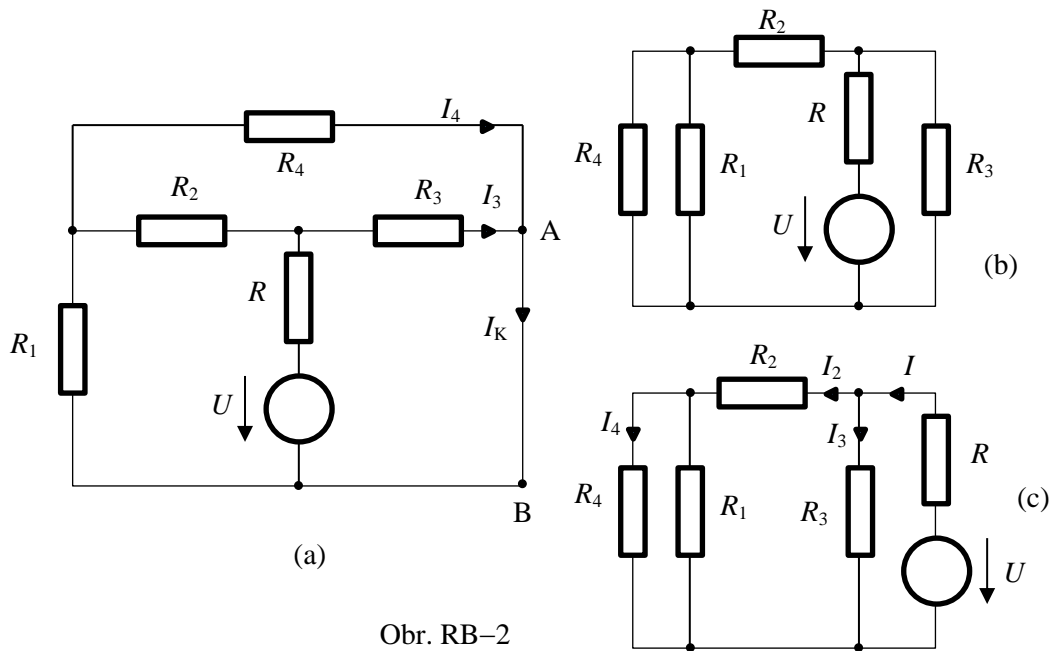
$$\tan \beta_1 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{v_0 \sin \alpha_1 - g t_1}{v_0 \cos \alpha_1} = \tan \alpha_1 - \frac{g t_1}{v_0} \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_1} =$$

$$= \sqrt{\frac{x_m}{x_m - 2h}} - 2 \frac{x_m - h}{\sqrt{x_m(x_m - 2h)}}. \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $v_1 \approx 38,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $\beta_1 \approx -30,0^\circ$ . 1 b

## 2. Théveninova veta

a) Obr. RB-2



Obr. RB-2

Ak je skrat medzi svorkami A, B, môžeme rezistory  $R_3$  a  $R_4$  pripojiť na dolný vodič, obr. RB-2 (b), a rezistor  $R_3$  presunúť naľavo od zdroja, obr. RB-2 (c). Rezistory  $R_1$ ,  $R_4$  sú paralelné, k nim je  $R_2$  sériový, k tejto sústave je  $R_3$  paralelne a nakoniec  $R$  je sériový. Výsledný odpor vzhľadom na svorky zdroja

$$R_v = R + \frac{R_3 \left( R_2 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} \right)}{R_3 + R_2 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}} = R + R_3 \frac{R_2 (R_1 + R_4) + R_1 R_4}{(R_3 + R_2)(R_1 + R_4) + R_1 R_4}.$$

Prúd zdroja  $I = U / R_v$ .

Prúdy  $I_3$ ,  $I_2$  (prúdový delič) a  $I_4$  (ďalší delič prúdu)

$$I_3 = I \frac{R_2 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}}{R_3 + R_2 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}} \quad I_2 = I \frac{R_3}{R_3 + R_2 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}}$$

$$I_4 = I_2 \frac{R_1}{R_1 + R_4} = I \frac{R_3 \frac{R_1}{R_1 + R_4}}{R_3 + R_2 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}}.$$

Prúd nakrátko podľa obr. RB-2 (a)

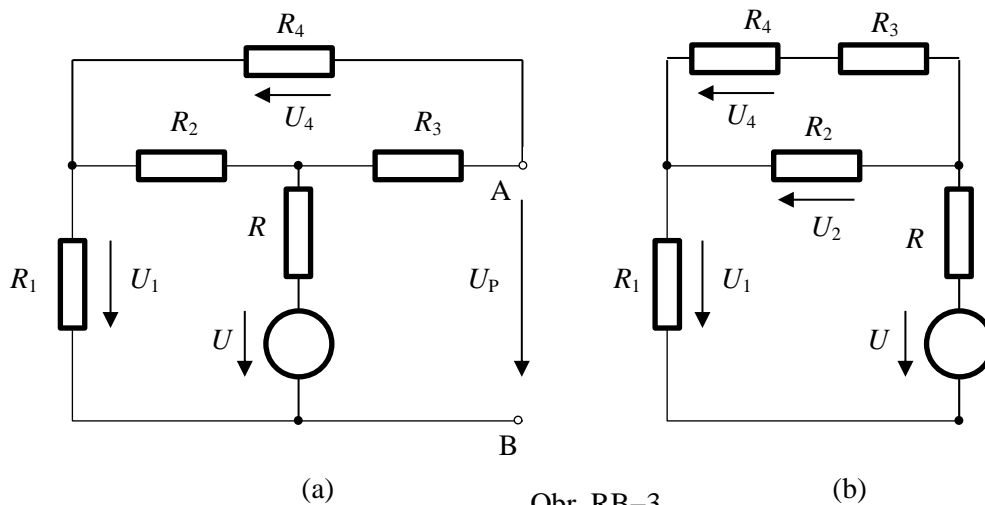
$$I_K = I_3 + I_4 = I \frac{R_2(R_1 + R_4) + R_1 R_4 + R_1 R_3}{(R_3 + R_2)(R_1 + R_4) + R_1 R_4} = U \frac{R_2(R_1 + R_4) + R_1 R_4 + R_1 R_3}{(R_3 + R_2)(R_1 + R_4) + R_1 R_4} =$$

$$= U \frac{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_4 R_2}{R[R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_4(R_2 + R_3)] + R_3[R_1(R_2 + R_4) + R_4 R_2]}.$$

4 b  
0,5 b

Pre dané hodnoty  $I_K = 0,20$  A.

b) Obr. RB-3



Na obrázku vidno, že  $U_P = U_4 + U_1$ .

Obvod naprázdno možno prekresliť podľa obr. (b). Vzhľadom na zdroj ide o jednu slučku zloženú zo sériového zapojenia  $R_1$ ,  $R$ , a sústavy troch rezistorov, pozostávajúcej z paralelného zapojenia  $R_2$  a sériovej dvojice  $R_3$ ,  $R_4$ . Celkový odpor

$$R_v = R + R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}.$$

Napätia  $U_1$  a  $U_2$  sú

$$U_1 = \frac{U}{R_v} R_1 \quad U_2 = \frac{U}{R_v} \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}.$$

Napätie  $U_2$  sa delí medzi  $U_3$  a  $U_4$

$$U_4 = U_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4} = \frac{U}{R_v} \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \frac{R_4}{R_3 + R_4} = \frac{U}{R_v} \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4}.$$

Napätie naprázdno

$$U_P = U_1 + U_4 = \frac{U}{R_v} \left( R_1 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \right) = U \frac{R_1 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4}}{R + R_1 + \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} =$$

$$= U \frac{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 R_4}{(R + R_1)(R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)}.$$

3 b

Pre dané hodnoty  $U_P = 8,0 \text{ V}$ .

0,5 b

c) Ak pôvodný obvod nahradíme náhradným zdrojom  $U_N, R_N$ , máme

$$U_N = U_P$$

a

$$R_N = \frac{U_P}{I_K} = \frac{R [(R_3 + R_2)(R_1 + R_4) + R_1 R_4] + R_3 [R_2 (R_1 + R_4) + R_1 R_4]}{(R + R_1)(R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)}.$$

Pre dané hodnoty  $U_N = 8,0 \text{ V}$ ,  $R_N = 40 \Omega$ .

1 b + 1 b

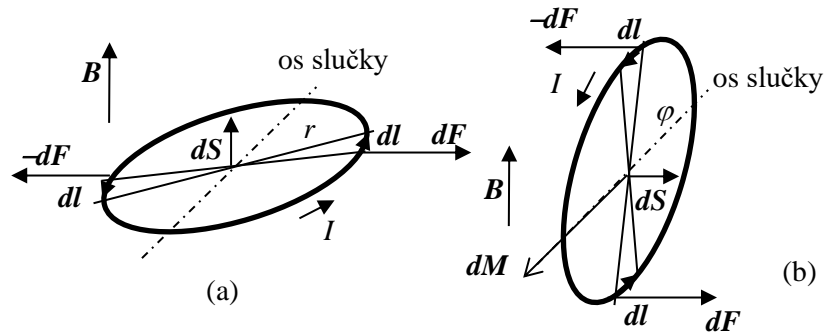
Ak pripojíme k svorkám rezistor  $R_5$ , je prúd prechádzajúci rezistorom

$$I = \frac{U_N}{R_N + R_5}. \text{ Pre dané hodnoty } I \approx 33 \text{ mA}.$$

0,5 b

### 3. Magnetický dipól v magnetickom poli

a) Uvažujme prúdovú slučku v magnetickom poli s indukciou  $B$ ,



Obr. RB-3

Na priamy vodič s dĺžkou  $l$  v homogénnom magnetickom poli s indukciou  $B$ , pričom indukcia  $B$  je kolmá na vodič, pôsobí sila  $F = B I l$  (Ampérová sila) kolmá na smer magnetickej indukcie i smer vodiča. Ak je tvar vodiča zložitejší, rozdelíme ho na malé úseky (elementy)  $dl$  s dĺžkou  $dl$  a smerom daným smerom prúdu vo vodiči. Vektor sily je potom vyjadrený vzťahom  $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$  (vektorový súčin  $d\mathbf{l}$  a  $\mathbf{B}$ ). Ak je rovina kružnicovej slučky kolmá na  $\mathbf{B}$ , obr. RB-3 (a), vektor sily  $d\mathbf{F}$  pôsobiacej na prúdový element  $dl$  leží v rovine slučky a moment sily vzhľadom na os slučky je nulový. Preto aj výsledný moment sily oôbiaci na celú slučku je nulový. Táto poloha slučky tak predstavuje rovnovážnu polohu.

Ak je rovina slučky kolmá na indukciu  $B$ , obr. RB-3 (b), pôsobí sila  $d\mathbf{F}$  na prúdový element kolmo na slučku, pričom  $dF = B dl \sin \varphi$  a jej moment  $dM = dF r \sin \varphi$ , kde  $\varphi$  uhol sprievodiča elementu  $dl$  vzhľadom na os.

Celkový moment sily má veľkosť

$$M = \int dM = \int_0^{2\pi} B I (r d\varphi) r \sin^2 \varphi = B I r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi B I r^2. \quad (2)$$

Maximálny moment sily (1)  $M_m = m B \sin \alpha$  pre uhol  $\alpha = \pi/2$  rad medzi magnetickou indukciou  $B$  a kolmicou (normálou) k ploche slučky  $M_m = m B$ .

Porovnaním s (2) máme

$$m = \pi r^2 I = S I, \text{ resp. } \mathbf{m} = m \mathbf{n}^0,$$

kde  $S$  je obsah slučky a  $\mathbf{n}^0$  jednotkový vektor kolmý na rovinu slučky.

b) Práca pri elementárnom otočení slučky okolo osi  $dW = \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ , pričom vektor  $d\boldsymbol{\alpha}$  elementárneho otočenia má smer osi otáčania v kladnom zmysle (pravá ruka – palec smer vektora a prsty smer otáčania, obr. RB-3). Ak uvažujeme východiskovú polohu slučky podľa obr. RB-3 (a),  $\alpha = 0$ , pri jej otáčaní kladnom zmysle sa mení uhol medzi vektormi  $B$  a  $m$  z hodnoty 0 do  $\pi/2$  rad – obr. (b) a ďalej do  $\pi$  rad (slučka prevrátená voči (a)). Práca vykonaná magnetickým poľom pri zmene  $\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \pi$  rad

$$W_1 = - \int_0^{\pi} M d\alpha = - \int_0^{\pi} m B \sin \alpha d\alpha = - m B \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha = - 2 m B = - \Delta E_p.$$

Pozn.: Znamienko mínus – vektory  $\mathbf{M}$  a  $d\boldsymbol{\alpha}$  majú opačný smer.

Z výsledku vidíme, že pri zmene z polohy  $\alpha = 0$  (dipólový moment orientovaný v smere  $\mathbf{B}$ ) do polohy  $\alpha = \pi$  rad (dipólový moment orientovaný opačne voči  $\mathbf{B}$ ) potenciálna energia postupne narastala. Pri  $\alpha = 0$  je potenciálna energia minimálna, pri  $\alpha = \pi/2$  rad maximálna, a rozdiel  $\Delta E_p = E_{p \max} - E_{p \min} = 2 m B = 2 I S B$ .

c) Moment hybnosti elektrónu vzhľadom na stred orbitálnej trajektórie (orbitu)

$$L = r p = r m_e v = m_e r^2 \omega = \hbar, \quad (3)$$

kde  $\hbar$  je redukovaná Planckova konštanta,  $\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \times 10^{-34}$  J·s.

Magnetický dipólový moment elektrónu

$$m = I S = \frac{e}{T} \pi r^2 = \frac{e\omega}{2} r^2. \quad (4)$$

Odtiaľ máme

$$m = \frac{e\eta}{2m_e} = \mu_B. \text{ Pre dané hodnoty } \mu_B \approx 9,27 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2.$$

Konštanta  $\mu_B$  sa nazýva *Bohrov magnetón*.

d) Pre magnetické pole s indukciou  $B = 2,0$  T máme

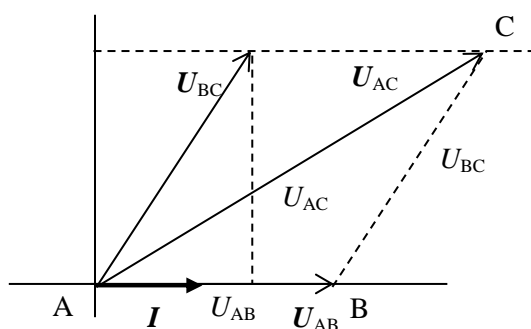
$$\Delta E_p = 2 \mu_B B = \frac{e\eta}{m_e} B. \text{ Pre dané hodnoty } \Delta E_p \approx 3,71 \times 10^{-23} \text{ J.}$$

Hľadaný pomer

$$\frac{\Delta E_p}{E_T} = \frac{e\eta}{m_e k_B} \frac{B}{T} \approx 8,96 \times 10^{-3}.$$

#### 4. Meranie stratového výkonu cievky – experimentálna úloha

- Príčinou strát v cievke s jadrom sú Jouleove straty vo vinutí cievky  $R_{L0} I^2$ , ktoré sú pri nízkych frekvenciách frekvenčne nezávislé. Spôsobujú zohrievanie vinutia. Odpor  $R_{L0}$  možno zmerať jednosmerným  $\Omega$ -metrom. V jadre cievky vznikajú hysterézne straty, pričom stratový výkon je priamoúmerný frekvencii prúdu, a straty vírivými prúdmi, ktorých veľkosť je úmerná druhej mocnine frekvencie. Tieto straty sa prejavujú zohrievaním jadra. Pri použití feritového jadra straty vírivými prúdmi nevznikajú (ferit je elektricky nevodivý), v železnom jadre sa tieto straty znižujú zostavením jadra z tenkých a vzájomne izolovaných plechov. Hysterézne straty sa prejavujú najmä pri veľkých prúdoch a znižujú sa použitím magneticky mäkkých materiálov s úzkou hysteréznou slučkou.
- Výsledkom je hodnota odporu  $R$ , ktorá sa použije v ďalších výpočtoch.
- Hodnota prúdu  $I$  sa nastaví pomocou napätia  $U_{AB}$  pri známom odpore  $R$ .
- Ak sa vhodne zvolí hodnota odporu  $R$ , majú veľkosti všetkých troch napätí rádovo porovnateľné hodnoty, čo je vhodné z hľadiska presnosti výpočtu veličín.
- Fázorový diagram, obr. RB–4



$U_{AB}, U_{AC}, U_{BC}$  – fázory  
 $U_{AB}, U_{AC}, U_{BC}$  – efektívne hodnoty  
 – strany trojuholníka ABC

Obr. RB–4

Pomocou troch hodnôt napätí zostrojíme trojuholník ABC, a potom príslušné fázory.

- Pre jednotlivé napätia platí

$$U_{AB} = R I, \quad U_{BC} = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2} I, \quad U_{AC} = \sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L)^2} I.$$

Odtiaľ po úprave máme

$$R_L = R \frac{U_{AC}^2 - U_{BC}^2 - U_{AB}^2}{2U_{AB}^2}.$$

- Činný výkon cievky

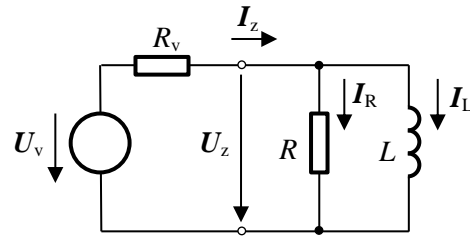
$$P = R_L I^2 = \frac{U_{AC}^2 - U_{BC}^2 - U_{AB}^2}{2R}.$$



## 5. Elektrický obvod

a) Obr. RB-5

1 b



Obr. RB-5

b) Fázor prúdu zdroja

$$I_z = \frac{U_v}{Z} = \frac{U_v}{R_v + \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}} = U_v \frac{R + j\omega L}{RR_v + j\omega L(R + R_v)} \quad 0,5 \text{ b}$$

Fázory prúdu rezistora a induktora

$$I_R = I_z \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = U_v \frac{j\omega L}{RR_v + j\omega L(R + R_v)}, \quad 0,5 \text{ b}$$

$$I_L = I_z \frac{R}{R + j\omega L} = U_v \frac{R}{RR_v + j\omega L(R + R_v)}. \quad 0,5 \text{ b}$$

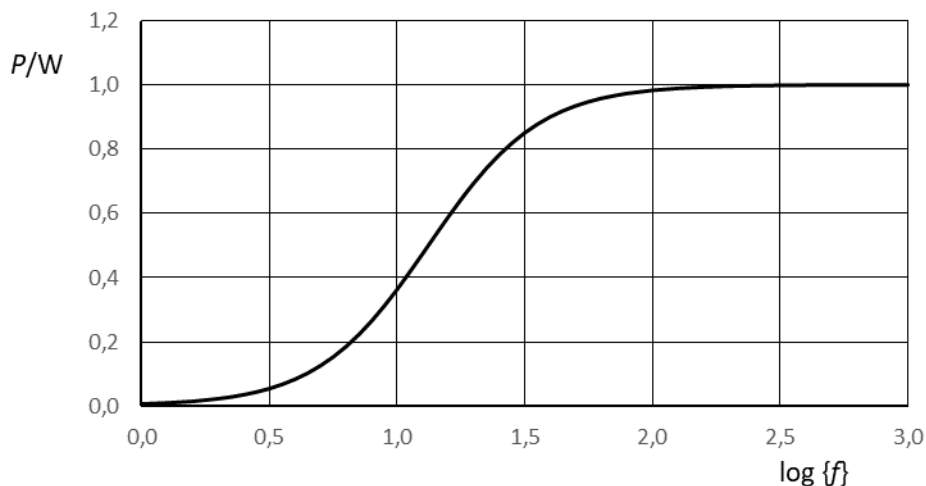
Napätie na svorkách zdroja

$$U_z = U_v - R_v I_z = U_v \frac{j\omega LR}{RR_v + j\omega L(R + R_v)}. \quad 0,5 \text{ b}$$

c) Činný výkon na dvojici R-L je rovný činnému výkonu na rezistore (činný výkon na induktore je nulový)

$$P = R I_R^2 = \frac{U_v^2}{R_v} \frac{RR_v (\omega L)^2}{(RR_v)^2 + (\omega L)^2 (R + R_v)^2}. \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

Graf pre dané hodnoty



Obr. RB-6

Graf 1 b

d) Z grafu, ako aj pomocou funkcie (1), určíme maximálnu hodnotu, ktorú dosiahne výkon pre vysoké frekvencie ( $P_m = \lim_{\omega \rightarrow \infty} P$ )

$$P_m = U_v^2 \frac{R}{(R + R_v)^2}. \quad 1 \text{ b}$$

Pomer výkonu  $P$  a maximálnej hodnoty  $P_m$

$$\frac{P}{P_m} = \frac{(\omega L)^2}{\left(\frac{R R_v}{R + R_v}\right)^2 + (\omega L)^2}.$$

Z podmienky  $P/P_m = 1/2$  dostávame

$$f_d = \frac{1}{2\pi L} \frac{R R_v}{(R + R_v)}. \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $P_m \approx 1,0 \text{ W}$ ,  $f_d \approx 13,3 \text{ Hz}$  (v grafe  $\log \{f_d\} \approx 1,12$ ;  $P_d = 0,5 \text{ W}$ ). 1 b

e) Fázorový diagram:

Fázový rozdiel medzi napätím  $U_Z$  a prúdom  $I_Z$  daný argumentom impedancie dvojice R-L

$$Z_{RL} = \frac{j\omega L R}{R + j\omega L} = Z_{RL} e^{j\varphi_{RL}}, \text{ kde } \varphi_{RL} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L}{R}.$$

Pre  $f = f_d$

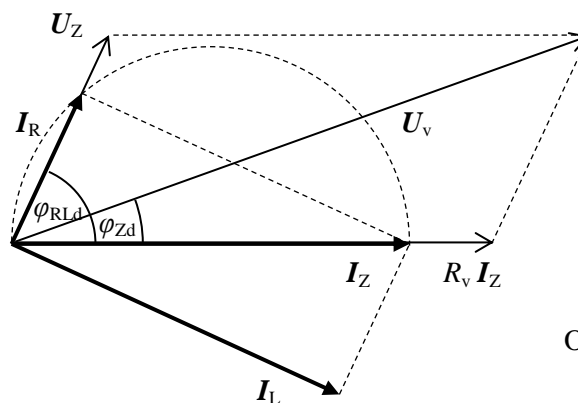
$$\varphi_{RLd} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{R_v}{R + R_v}. \text{ Pre dané hodnoty } \varphi_d \approx 1,41 \text{ rad} \approx 81^\circ.$$

Podobne fázový rozdiel medzi  $U_v$  a  $I_Z$  je argument impedancie  $Z = R_v + Z_{RL}$

$$\varphi_Z = \arctan \frac{\omega L(R + R_v)}{R R_v} - \arctan \frac{\omega L}{R}$$

a pre  $f = f_d$

$$\varphi_{Zd} = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{R_v}{R + R_v}. \text{ Pre dané hodnoty } \varphi_{Zd} \approx 0,62 \text{ rad} \approx 36^\circ.$$



Obr. RB-7

Fázový diagram 2 b

## 6. Atmosféra Zeme

a) Teplotu  $T$  vzduchu vyjadríme vzťahom

$$T = T_0 - k(h - h_0), \text{ kde } k = (t_0 - t_1) / (h_1 - h_0). \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $k = 6,5 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/m}$ .

Vzhľadom na hmotnosť vzduchu klesá tlak vzduchu s rastom výšky

$$dp = -\rho g dh, \quad (2)$$

kde  $\rho = \frac{p M_m}{R T}$  je hustota vzduchu pri tlaku  $p$  a termodynamickej teplote  $T$ . Tento vzťah

vyplýva priamo zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$$pV = nRT = \frac{m}{M_m} RT. \quad (3)$$

Rovnicu (2) pre zmenu tlaku upravíme na tvar

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M_m}{R[T_0 - k(h - h_0)]} g dh$$

a integrujeme

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{M_m g}{k R} \int_{h_0}^h \frac{dh}{h - \left(h_0 + \frac{T_0}{k}\right)}, \text{ resp. } \ln \frac{p}{p_0} = \frac{M_m g}{k R} \ln \left[1 - \frac{k(h - h_0)}{T_0}\right].$$

Po úprave máme

$$p = p_0 \left[1 - \frac{k(h - h_0)}{T_0}\right]^{\frac{M_m g}{k R}}. \quad (4)$$

Tlak v letovej výške  $h_1$

$$p_1 = p_0 \left[1 - \frac{k(h_1 - h_0)}{T_0}\right]^{\frac{M_m g}{k R}}$$

a pre dané hodnoty  $p_1 \approx 26,7 \text{ kPa}$  (približne  $\frac{1}{4} p_0$ )

3 b

b) Zo vzťahov (1) a (4) určíme požadovanú závislosť

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{M_m g}{k R}}.$$

Pre adiabatický dej platí stavová rovnica  $pV^\kappa = p_0 V_0^\kappa$ , kde  $\kappa$  je adiabatická konštanta s hodnotou  $\kappa = 1,4$  pre plyn dvojatómových molekúl. S použitím rovnice (2) vylúčime objem  $V$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad 1 \text{ b}$$

Pre porovnanie použijeme napr. náhradu  $\frac{n}{n-1} = \frac{M_m g}{k R}$ , odkiaľ  $n = \frac{M_m g}{M_m g - k R}$ .

Pre dané hodnoty  $n \approx 1,23$ .

Hodnota sa nachádza medzi hodnotou  $n = 1$  pre izotermický dej a  $n = \kappa = 1,4$  pre adiabatický (tepelne izolovaný) dej. 1 b

Na znížení hodnoty  $n < \kappa$  sa môže podieľať obsah viac atómových molekúl ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  a pod.), pre ktoré je  $\kappa \approx 1,33$ . Tento vplyv je ale zanedbateľný pre veľmi nízky obsah týchto látok vo vzduchu. Podstatnejšie je nesplnenie podmienky tepelnej izolácie jednotlivých vzduchových vrstiev v troposfére, čo súvisí s čiastočným premiešavaním vrstiev, a tým aj prenosom tepla prúdením vzduchu. Pri dokonalom premiešavaní by bola troposféra izotermická  $n \rightarrow 1$ . 1 b

- c) Vztlaková sila na krídla je priamoúmerná hustote  $\rho$  vzduchu a druhej mocnine rýchlosti  $v$  obtekania krídla (aerodynamický tlak  $\frac{1}{2}\rho v^2$  napr. v Bernoulliho rovnici). Keďže vztlaková sila sa rovná tiažovej sile, pri nezmenenom tvare krídiel

$$\rho_0 v_2^2 = \rho_1 v_1^2, \text{ resp. } \frac{p_0 M_m}{RT_0} v_2^2 = \frac{p_1 M_m}{RT_1} v_1^2,$$

odkiaľ máme

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{p_1 T_0}{p_0 T_1}}. \text{ Pre dané hodnoty } v_2 \approx 521 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}. \quad 1 \text{ b}$$

Ak sa vztlaková sila pri štarte zvýši v pomere  $z = 3$ , platí pre vzletové podmienky

$$\rho_0 v_3^2 = z \rho_1 v_1^2,$$

odkiaľ máme

$$v_3 = v_1 \sqrt{\frac{1}{z} \frac{p_1 T_0}{p_0 T_1}}. \text{ Pre dané hodnoty } v_3 \approx 301 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}. \quad 1 \text{ b}$$

Klapky síce zväčšujú vztlakovú silu, ale súčasne zvyšujú aerodynamický odpor proti pohybu a tým aj spotrebu paliva. Preto klapky sa použijú iba pri nízkej rýchlosti v začiatkovej fáze a po dosiahnutí dostatočnej rýchlosti letu sa zasunú, čím krídla dostávajú ideálny aerodynamický tvar, pre ktorý je odporová sila minimálna. Vztlaková sila pôsobiaca na krídla lietadla so zmenšenou plochou po zasunutí klapiek je už dostatočná na udržanie lietadla v stúpavom alebo vodorovnom lete.

1 b

## 7. Magnusov jav

a) Na hornej časti vzhľadom na okolitý nehybný vzduch má Bernoulliho rovnica tvar

$$\frac{1}{2} \rho (v + v_r)^2 + p_1 = p_0, \quad 1 \text{ b}$$

na dolnej časti

$$\frac{1}{2} \rho (v - v_r)^2 + p_2 = p_0. \quad 1 \text{ b}$$

Rozdiel tlakov  $p_1 - p_2$  na sústavu spôsobí výslednú tlakovú silu

$$F_v = S (p_2 - p_1) = S \left[ p_0 - \frac{1}{2} \rho (v - v_r)^2 - \left( p_0 - \frac{1}{2} \rho (v + v_r)^2 \right) \right] \quad 1 \text{ b}$$

a po úprave  $F_v = 2Ll\rho v v_r$  (1) 1 b

v smere nahor.

Pre dané hodnoty  $F_v \approx 16 \text{ kN}$  1 b

b) Pre vztlakovú silu použijeme vzťah (1), do ktorého dosadíme  $l = \pi r$  a  $v_r = \omega r$

$$F_v = 2L\pi r^2 \rho v \omega \quad (\text{vzťah Kuttov-Žukovského}). \quad 2 \text{ b}$$

Pri minimálnej rýchlosti  $v_{\min}$  vzletu je vztlaková sila dvojice valcov rovná tiažovej sile

$$4L\pi r^2 \rho v_{\min} \omega = m g,$$

odkiaľ máme

$$v_{\min} = \frac{m g}{8L\pi^2 r^2 \rho N}. \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty  $v_{\min} \approx 14,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 52 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . 1 b

---

### 59. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie B

Autori návrhov úloh:	Ivo Čáp 1, 2, 3, 4, 6, Kamil Bystrický 5, Dušan Nemeč 7
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Klivanec, Eubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018