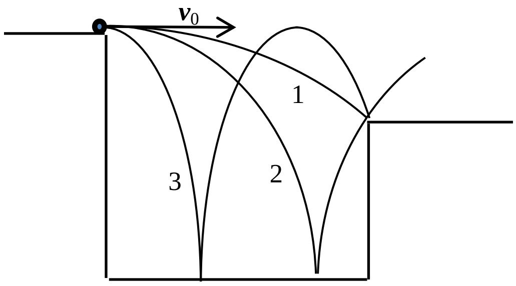
59. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2017/2018
Kategória D – domáce kolo
Riešenie úloh

1. Vodorovný vrh loptičky cez jamu

a) Obr. RD–1

Pri vodorovnom vrhu sú tri možnosti (1) priamy zásah okraja jamy, (2) zásah odspodu odrazom od dna a (3) zásah zvrchu odrazom od dna. 3×1 b



Obr. RD–1

b) Vodorovný vrh opisujú rovnice trajektórie vzhľadom na začiatok v bode vrhu

$$x = v_0\, t$$
$$y = -\frac{1}{2} g\, t^2 .$$

V prvom prípade (1) sú súradnice bodu dopadu $x = x_1 = l$, $y = h–H$. Po dosadení do rovníc trajektórie máme

$$x_1 = v_0 \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = l$$ 1,5 b

odkiaľ dostávame výsledok

$$v_0 = l \sqrt{\frac{g}{2(H-h)}}$$. Pre dané hodnoty $v_{01} \approx 21{,}0\ \text{m·s}^{-1}$. 0,5 b

V druhom prípade (2) sa využíva dokonalý odraz, pri ktorom sa nemení vodorovná zložka rýchlosti v_0 a zvislá nemení veľkosť ale smer zmení na opačný. Tvar trajektórie pred odrazom a po ňom je rovnaký (zrkadlovo symetrický). Pri riešení možno postupovať rôznymi spôsobmi. Napr. určíme súradnicu x_{21} dopadu na dno a potom súradnicu x_{22} dosiahnutia výšky h nad dnom. Vzdialenosť $l = 2x_{12} – x_{22}$.
Pre dopad na dno $x = x_{21}$, $y = –H$ a pre pokles na $y = – (H – h)$ pre $x = x_{22}$ máme z rovníc trajektórie

$$x_{21} = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad \text{a} \quad x_{22} = v_0 \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} ,$$

odkiaľ $l = 2v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} - v_0 \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$ 2 b

a $v_0 = \sqrt{\frac{g}{2}}\, \frac{l}{2\sqrt{H} - \sqrt{(H-h)}}$. Pre dané hodnoty $v_{02} \approx 10{,}5\ \text{m·s}^{-1}$. 0,5 b

V treťom prípade (3) je situácia podobná. Trajektória pozostáva z dvoch úsekov s vodorovnou dĺžkou x_{21} a jednej s vodorovnou dĺžkou x_1: $l = 2x_{21} + x_1$

$$l = 2v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} + v_0 \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} ,$$ 2 b

odkiaľ

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2}}\,\frac{l}{2\sqrt{H} + \sqrt{H-h}}$$. Pre dané hodnoty $v_{03} \approx 5{,}25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 0,5 b

2. Pružná zrážka kyvadiel

a) Prvá guľôčka sa po uvoľnení pohybuje pôsobením tiažovej sily a zachováva sa jej mechanická energia. Guľôčka klesne o rozdiel výšok $l_1 - l_1 \cos\alpha_0$. Pokles potenciálnej energie je rovný zmene kinetickej energie

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = m_1 g\, l_1 \left(1 - \cos\alpha_0\right).$$ 1,5 b

Odtiaľ máme

$$v_0 = \sqrt{2 g\, l_1 \left(1 - \cos\alpha_0\right)}$$. Pre dané hodnoty $v_0 \approx 1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 0,5 b

b) Pri zrážke sa zachováva hybnosť sústavy, čo možno vyjadriť rovnicou

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2\,, \tag{1}$$

kde v_1 a v_2 sú rýchlosti guľôčok tesne po zrážke.
Keďže je zrážka dokonale pružná, nedochádza pri nej k strate mechanickej energie. Počas zrážky sa nemení potenciálna energia, a preto kinetická energia sústavy tesne pred zrážkou a tesne po nej je rovnaká

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\,. \tag{2}$$

Riešením sústavy rovníc (1) a (2) dostávame rýchlosti

$$v_1 = v_0 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1-n}{1+n}\sqrt{2 g\, l_1 \left(1 - \cos\alpha_0\right)}$$

a $$v_2 = v_0 \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2}{1+n}\sqrt{2 g\, l_1 \left(1 - \cos\alpha_0\right)}\,.$$

Pre vychýlenie zodpovedajúce rýchlostiam v_1 a v_2 platí

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g\, l_1 \left(1 - \cos\alpha_1\right),$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g\, l_2 \left(1 - \cos\alpha_2\right)$$

a odtiaľ

$$\cos\alpha_1 = 1 - \frac{v_1^2}{2 g\, l_1} = 1 - \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \left(1 - \cos\alpha_0\right),$$ 2 b

analogicky

$$\cos\alpha_2 = 1 - \frac{v_2^2}{2 g\, l_2} = 1 - \left(\frac{2}{1+n}\right)^2 \frac{l_1}{l_2} \left(1 - \cos\alpha_0\right).$$ 2 b

Pre dané hodnoty:
pre n_1: $\alpha_1 \approx 14°$, $\alpha_2 \approx 86°$, 0,5 b
pre n_2: $\alpha_1 \approx 0°$, $\alpha_2 \approx 66°$, 0,5 b
pre n_3: $\alpha_1 \approx 11°$, $\alpha_2 \approx 52°$. 0,5 b

c) Ak sa má záves druhej guľôčky vychýliť do vodorovného smeru, $\alpha_2 = 90°$

$$\cos\alpha_{0\mathrm{m}} = \quad 1-\left(\frac{1+n}{2}\right)^2 \frac{l_2}{l_1}\,. \qquad 2\text{ b}$$

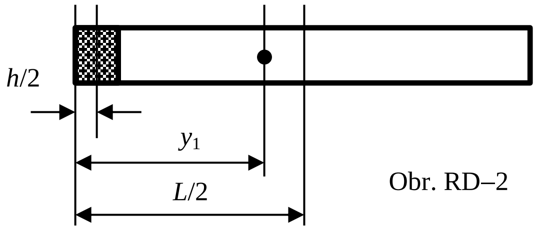
Pre jednotlivé pomery $\alpha_{0m1} \approx 62°$, $\alpha_{0m2} \approx 80°$, pre n_3 neexistuje $\alpha_{0m} \leq 90°$. 0,5 b

3. Hydrostatické váhy

a) Poloha ťažiska, obr. RD–2, skúmavky so záťažou

$$y_1 = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 L + \rho_2 S_2 h^2}{m_1 + \rho_2 S_2 h}\,, \qquad 3\text{ b}$$

kde h je výška valčeka záťaže.



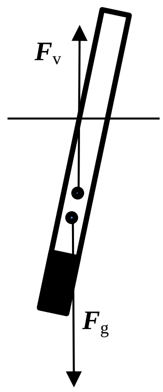
Obr. RD–2

b) Ak skúmavka pláva v zvislej polohe, je jej ponor y_2 daný rovnováhou gravitačnej a vztlakovej sily

$$\left(m_1 + \rho_2 S_2 h\right) g = \rho_1 S_2 y_2\ g\,,$$

odkiaľ máme

$$y_2 = \frac{m_1 + \rho_2 S_2 h}{\rho_1 S_2}\,. \qquad 2\text{ b}$$



Obr. RD–3

Stabilná rovnovážna zvislá poloha je charakteristická tým, že ak skúmavku mierne nakloníme a uvoľníme, musí sa vrátiť nazad do zvislej polohy. Pri naklonení pôsobia na skúmavku momenty tiažovej a vztlakovej sily, obr. RD–3. Aby pôsobil výsledný moment sily smerom k zvislej polohe, musí byť vzhľadom na stred dna skúmavky moment tiažovej sily menší ako moment sily vztlakovej. Keďže v rovnovážnom stave sú veľkosti oboch síl rovnaké, musí byť rameno tiažovej sily menšie ako rameno sily vztlakovej (pôsobisko tiažovej sily je v ťažisku skúmavky so záťažou, pôsobisko vztlakovej sily v polovine dĺžky ponorenej časti skúmavky)

$$y_1 < y_2 / 2\,.$$

Po dosadení za y_1 a y_2 dostávame nerovnicu

$$\frac{1}{2}\,\frac{m_1 L + \rho_2 S_2 h^2}{m_1 + \rho_2 S_2 h} < \frac{m_1 + \rho_2 S_2 h}{2\,\rho_1 S_2}$$

a po úprave

$$S_2^2\,\rho_2\left(\rho_2 - \rho_1\right) h^2 + 2 m_1 S_2\,\rho_2\,h + m_1^2 - m_1 S_2\,\rho_1 L\ >\ 0\,.$$

Odtiaľ máme

$$h > \frac{m_1}{S_2\left(\rho_2 - \rho_1\right)}\left[\sqrt{1-\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}\left(1-\frac{\rho_1 S_2\ L}{m_1}\right)}-1\right] = h_{\min}\,.$$

Pre dané hodnoty $h_{\min} \approx 3{,}4$ mm. 3 b

c) Keď sa nasype do skúmavky cukor, zmení sa ponor z hodnoty y_2 na hodnotu $y_2 + \Delta y$, kde

$$\Delta y = \frac{m_2}{\rho_1 S_2} .$$

Objem ponorenej časti skúmavky

$$\Delta V = S_2 \, \Delta y = \frac{m_2}{\rho_1}$$

zodpovedá zvýšeniu celkového objemu vody a ponorenej časti skúmavky vo valci $\Delta V = x S_1$, a teda

$$x = \frac{m_2}{\rho_1 S_1} .$$

Pre dané hodnoty $x \approx 32$ mm. 2 b

4. Meranie hustoty telesa – *experimentálna úloha*

5. Šprint

a) Priemerná rýchlosť $v_0 = s_0 / t_0$. Pre dané hodnoty $v_0 \approx 10{,}44$ m/s ($\approx 37{,}58$ km/h). 1 b

b) V polovici dráhy má už bežec maximálnu rýchlosť v_m. Túto rýchlosť určíme z priebežných časov $v_\mathrm{m} = (s_2 - s_1)/(t_2 - t_1)$.
Pre dané hodnoty $v_\mathrm{m} \approx 12{,}20$ m/s (43,90 km/h). 1 b

c) Počas rovnomerne zrýchleného pohybu s nulovou začiatočnou rýchlosťou a konečnou rýchlosťou v_m je priemerná rýchlosť $v_\mathrm{m}/2$. Čas rozbehu označíme t_3. Dráha rovnomerne zrýchleného pohybu

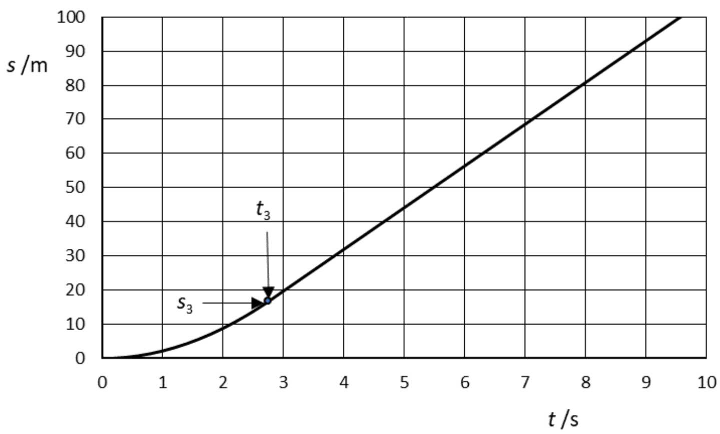
$$s_3 = \frac{v_\mathrm{m}}{2} t_3 .$$ 1 b

Keby sa pohyboval bežec rýchlosťou v_m na celej dráhe, bol by čas behu $t_4^* = s_0 / v_\mathrm{m}$. Rozdiel $\Delta t = t_0 - t_4^*$ je spôsobený časovým oneskorením $\Delta t = t_3/2 = s_3 / v_\mathrm{m}$. Odtiaľ máme

$$s_3 = v_\mathrm{m} \, t_0 - s_0 \ .$$

Pre dané hodnoty $s_3 = 16{,}9$ m. 2 b

d) Graf $s = \mathrm{f}(t)$.
Časová závislosť dráhy rovnomerne zrýchleného pohybu $s = (1/2)\, a\, t^2$ pre $t \leq t_3$, kde zrýchlenie $a = \frac{v_\mathrm{m}^2}{2\, s_3}$. Pre dané hodnoty $a \approx 4{,}40$ m/s^2 a $t_3 \approx 2{,}77$ s.
Pre $t > t_3$ je pohyb rovnomerný a platí $s = s_3 + v_\mathrm{m}\, (t - t_3)$.



Obr. RD–4

2 b

e) Čas t_4 je kratší od času t_0 o Δt = 0,91 s.

Je to spôsobené hlavne tým, že pri štafete sa bežec preberajúci štafetu pred prebraním rozbehne a pri odovzdaní už má takmer maximálnu rýchlosť, čím sa ušetrí čas na rozbeh. Pri rovnakom najvyššom výkone a bez straty času rozbehom by bol na dráhe s_0 čas behu $t_4^* = s_0 / v_m$. Pre dané hodnoty $t_4^* \approx 8{,}20$ s. Zmeraný čas $t_4 = 8{,}65$ s je ale o $\Delta t_4 \approx 0{,}45$ s dlhší. Čas t_4 je síce kratší ako t_0, ale nedosahuje hodnotu t_4^*, nakoľko aj pri letmom štarte (s predchádzajúcim rozbehom) spôsobí odovzdávanie štafetového kolíka určitú, aj keď malú, stratu času. 1 b

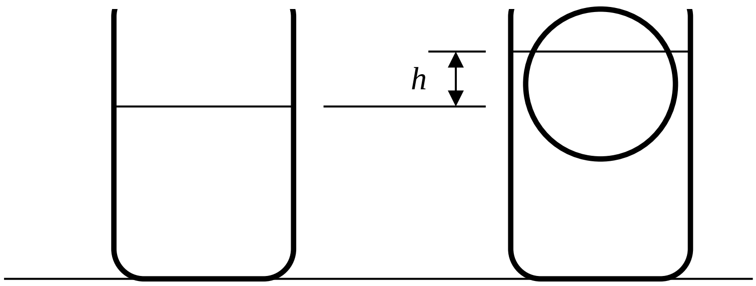
f) Ak by Bolt bežal dráhu 200 m s rovnakým výkonom ako dráhu 100 m, oneskorenie spôsobené rozbehom by bolo iba na začiatku a celkový čas $t_5^* = t_0 + t_4^*$.

Pre dané hodnoty $t_5 \approx 17{,}78$ s. Čas pri rekordnom behu $t_5 = 19{,}19$ s je dlhší o $\Delta t_5 = 1{,}4$ s. Keďže pri šprinte beží bežec na tzv. „kyslíkový dlh", pri dlhšej dráhe výkon klesne, bežec nevydrží tempo na dráhe 200 m rovnaké ako na polovičnej trati 100 m. Rýchlosť najmä v druhej polovici dráhy je tak menšia ako v_m pri behu na 100 m. 2 b

Pozn.: v hodnotení riešenia v bodoch e), f) hodnotiť podstatu odpovede.

6. Plávanie gule

a) Ilustračný obrázok, obr. RD–5 1 b



Obr. RD–5

b) Objem ponorenej časti plávajúcej gule určíme zo zvýšenia hladiny v nádobe. Zvýšenie objemu pod hladinou o $S_v\, h$ predstavuje objem ponorenej časti gule

$$V_p = S_v\, h\,,$$

kde S_v je obsah vnútorného prierezu nádoby, $S_v = \pi\, R_v^2$.
Keďže hmotnosť vody $m_v = S_v\, h\, \rho_v$ vytlačenej plávajúcim telesom je rovná hmotnosti m_g gule, máme

$$m_g = \rho_v\, V_p = \pi R_v^2\, h\, \rho_v\,.$$

Pre dané hodnoty $m_g \approx 0{,}46$ kg. 3 b

c) Pomer objemu V_p ponorenej časti gule a objemu V_g celej gule

$$p = \frac{V_p}{V_g} = \frac{3 R_v^2\, h}{4 R_g^3}\,.$$

Pre dané hodnoty $p \approx 0{,}88$, $p(\%) \approx 88$ %. 3 b

d) Priemerná hustota gule

$$\rho_g = \frac{m_g}{V_g} = \frac{3 R_v^2\, h\, \rho_v}{4 R_g^3}\,.$$

Priemernú hustotu môžeme určiť aj zo vzťahu

$$\rho_g = \frac{m_d + m_o}{V_g} = \frac{\rho_d\left(V_g - V_o\right) + \rho_o\, V_o}{V_g} = \rho_d + \left(\rho_o - \rho_d\right)\frac{V_o}{V_g}\,.$$

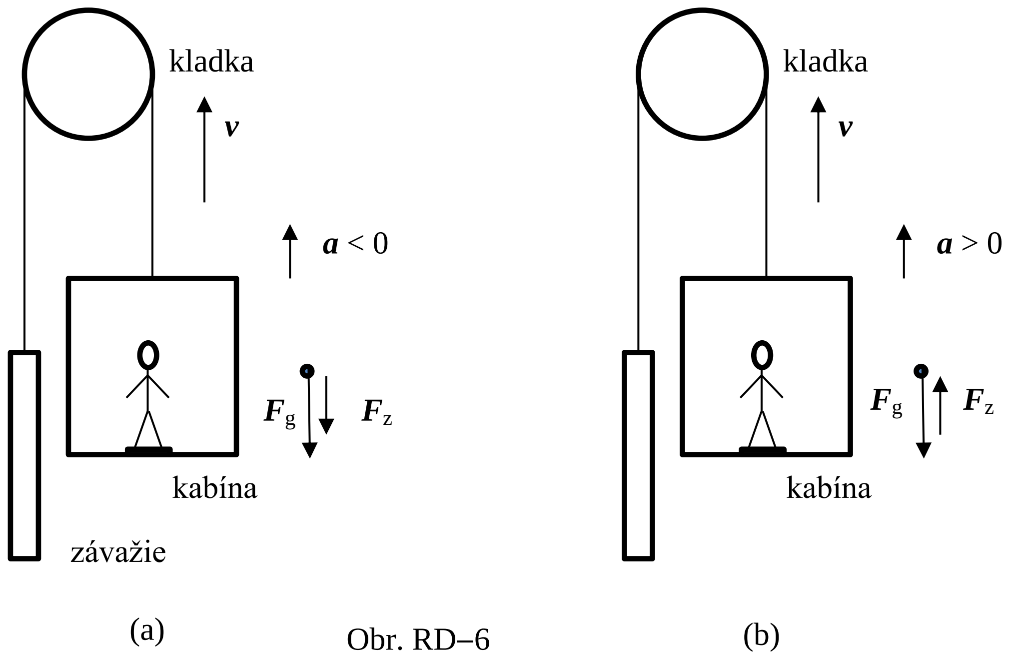
Z rovnosti oboch výrazov, po úprave dostaneme výsledok

$$\rho_d = \frac{3\rho_v R_v^2\, h - 4\rho_o R_o^3}{4\left(R_g^3 - R_o^3\right)}\,.$$

Pre dané hodnoty $\rho_d \approx 593\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. 3 b

7. Výťah

a) V sústave pohybujúcej sa v zvislom smere so zrýchlením a v gravitačnom poli Zeme pôsobí na teleso s hmotnosťou m zotrvačná sila $\boldsymbol{F}_z = -m\,\boldsymbol{a}$. Celková sila pôsobiaca na teleso $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_z = m(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a})$, $F = m\,(g \pm a) = m_p^{*} g$, podľa toho, či $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{a}$ majú súhlasnú alebo opačnú orientáciu. Pri rozbehu smerom nahor, obr. RD–6 (a) majú gravitačná a zotrvačná sila rovnaký smer a zdanlivá hmotnosť je väčšia, pri brzdení pohybu, obr. RD–6 (b) je to opačne.



Obr. RD–6

2 b

b) Pri rozbehu výťahu so zrýchlením a_1 pôsobí na chlapca zotrvačná sila $F_{z1} = -m_p\,a_1$. Výsledná sila pôsobiaca na povrch váhy $F_1 = m_p\,(g + a_1)$ a údaj váhy je $m_{p1} = m_p + m_p\,a_1 / g$ (zdanlivá hmotnosť).

Odtiaľ určíme zrýchlenie výťahu pri rozbehu

$a_1 = \dfrac{m_{p1} - m_p}{m_p}\,g$. Pre dané hodnoty $a_1 = 2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. 1 b

Pri brzdení výťahu pôsobí na chlapca zotrvačná sila $F_{z2} = -m_p\,a_2$. Váha ukáže menšiu hmotnosť m_{p2} a zrýchlenie počas brzdenia je

$a_2 = \dfrac{m_{p2} - m_p}{m_p}\,g$. Pre dané hodnoty $a_2 = -1{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. 1 b

Rýchlosť výťahu pri rovnomernom stúpaní

$v_1 = \dfrac{2\,\Delta h}{t_1}$. Pre dané hodnoty $v_1 = 1{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 1 b

Rýchlosť v_1 dosiahne výťah na dráhe

$h_1 = \dfrac{v_1^2}{2\,a_1}$ za dobu $t_1 = \dfrac{v_1}{a_1}$. Pre dané hodnoty $h_1 = 0{,}25$ m, $t_1 = 0{,}50$ s. 1 b

Rovnako dráha a čas brzdenia

$h_2 = -\dfrac{v_1^2}{2a_2}$ a $t_2 = -\dfrac{v_1}{a_2}$. Pre dané hodnoty $h_2 \approx 0{,}33$ m, $t_2 \approx 0{,}67$ s. 1 b

Čas rovnomerného pohybu

$t_3 = \dfrac{4\Delta h - h_1 - h_2}{v_1} = \dfrac{4\Delta h - h_1 - h_2}{2\Delta h} t_1$. Pre dané hodnoty $t_3 \approx 9{,}8$ s.

Celkový čas pohybu z 1. do 5. poschodia

$t_{15} = t_1 + t_2 + t_3$. Pre dané hodnoty $t_{15} \approx 11{,}0$ s. 1 b

c) V statickom stave a v stave rovnomerného pohybu prevažuje protizávažie a výsledný moment, ktorý musí motor prekonávať je

$M_\mathrm{n} = -r\left(m_\mathrm{z} - m_0 - m_\mathrm{p}\right) g$. Pre dané hodnoty $M_\mathrm{n} \approx -468$ N·m.

Ako vidno, motor musí pohyb kabíny brzdiť, nakoľko protizávažie má väčšiu hmotnosť ako kabína s chlapcom.

V okamihu rozbehu musí motor uviesť sústavu do zrýchleného pohybu a prekonať zotrvačnú silu $F_\mathrm{z} = (m_\mathrm{z} + m_0 + m_\mathrm{p})\, a_1$.

Výsledný moment sily motora

$M_\mathrm{o} = r\,(m_\mathrm{z} + m_0 + m_\mathrm{p})\, a_1 + M_\mathrm{n}$. Pre dané hodnoty $M_\mathrm{o} \approx 366$ N·m. 1 b

d) Počas rovnomerného stúpania bol výkon motora

$P_\mathrm{n1} = F\, v_1 = \left(m_0 + m_\mathrm{p} - m_\mathrm{z}\right) g\, v_1$. Pre dané hodnoty $P_\mathrm{n1} \approx -\,1{,}17$ kW.

Pri pohybe v opačnom smere pôsobia rovnaké sily, iba v opačnom smere vzhľadom na smer otáčania motora, tzn. $P_\mathrm{n2} \approx +\,1{,}17$ kW. 1 b

Zvláštnosťou je, že pri pohybe kabíny smerom nahor musí motor brzdiť, zatiaľ čo pri pohybe nadol musí ťahať. V prípade plne obsadenej kabíny by to však bolo naopak.

59. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie D*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád 1, 2, 5, 7, Ivo Čáp 3, 4, 6
Spracovanie návrhov úloh a riešení:	Ivo Čáp, Ľubomír Konrád
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018