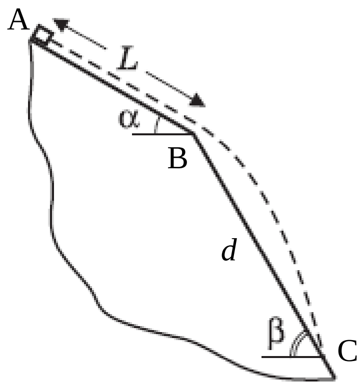
59. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2017/2018
Kategória C – domáce kolo
Text úloh

1. Kúsok ľadu na lomenej streche

Strechu rodinného domu tvoria dve rovinné plochy, ktoré zvierajú s vodorovným smerom uhly α = 30° a β = 60°, obr. C–1. V meste A vo vzdialenosti L = 80 cm od zlomu strechy B sa pri odmäku uvoľnil malý kúsok ľadu a začal sa po mokrej streche šmýkať nadol. Po dosiahnutí zlomu strechy B, určitý čas τ letel vzduchom, až kým nedopadol v bode C na strmšiu plochu strechy. Faktor trenia medzi ľadom a strechou f = 0,29.



Obr. C–1

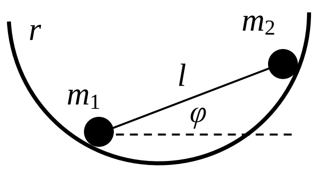
a) Určte rýchlosť v_0 ľadu v bode B.
b) Určte čas τ letu ľadu nad strechou.
c) Určte vzdialenosť d bodu dopadu C kúska ľadu od hrany zlomu B strechy pomocou veličín v_0 a τ určených v častiach a) a b) úlohy.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre dané hodnoty, tiažové zrýchlenie g = 9,8 m·s^{-2}. Odpor vzduchu neuvažujte.

2. Rovnovážna poloha dvojice guľôčok v miske

Na vnútornom povrchu hladkej guľovej misky s polomerom r sa nachádza dvojica malých guľôčok s hmotnosťami m_1 a m_2, vzájomne spojených pevnou tenkou tyčkou s dĺžkou l a veľmi malou hmotnosťou, obr. C–2.

Predpokladajte, že trenie medzi guľôčkami a povrchom misky je veľmi malé.



Obr. C–2

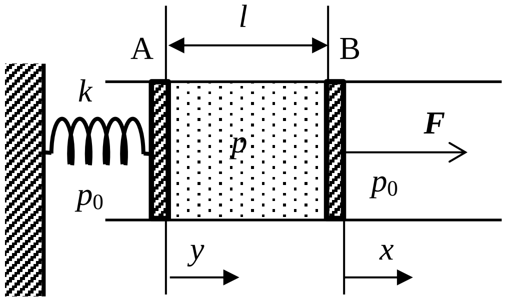
a) Prekreslite obr. C–2 a vyznačte v ňom ako vektory všetky sily, ktoré pôsobia na guľôčky. Jednotlivé sily pomenujte.

Po vložení guľôčok s priečkou do misky sa vytvorí rovnovážny stav, pričom priečka zviera s vodorovným smerom uhol φ.

b) Napíšte prostredníctvom síl a momentov síl podmienky rovnováhy (pokoja) sústavy.
c) Určte uhol φ, pri ktorom je sústava v rovnovážnej polohe a veľkosť sily F_T, ktorou pôsobí tyčka na guľôčky v rovnovážnej polohe, pre hodnoty m_1 = 30 g, m_2 = 20 g, l = 25 cm, r = 20 cm.

3. Pneumatické ovládanie piesta

Piest A je spojený pružinou s tuhosťou k s pevnou konštrukciou Medzi druhým piestom B a piestom A je uzavretý vzduch. Oba piesty sa môžu pohybovať v pevnom valci, obr. C–3. Na začiatku je tlak p vzduchového stĺpca vo valci rovný vonkajšiemu atmosférickému tlaku p_0 a dĺžka vzduchového stĺpca je l_0. Tepelná vodivosť oceľového valca je malá. Obsah povrchu piestov ako aj prierez valca majú rovnakú veľkosť S.



Obr. C–3

a) Piest B sa začne posúvať rovnomerným pohybom v smere sily $\boldsymbol{F}$. Uveďte, aký dej bude prebiehať vo vzduchu medzi piestmi ak sa piest B bude posúvať (i) veľmi pomaly alebo (ii) veľmi rýchlo.

Výchylku piestu B zo začiatočnej polohy označíme x a piestu A označíme y.

b) V prvom prípade (i) sa začne piest B posúvať veľmi pomaly. Odvoďte vzťah pre posunutie x piesta B ako funkciu $x = \mathrm{f}(y)$ posunutia y.
c) V druhom prípade (ii) sa začne piest B posúvať rýchlo. Odvoďte vzťah pre posunutie x piesta B ako funkciu $x = \mathrm{g}(y)$ posunutia y.
d) Do spoločného grafu zostrojte graf funkcie $x = \mathrm{f}(y)$ a funkcie $x = \mathrm{g}(y)$ pre hodnoty $S = 13\ \mathrm{cm}^2$, $p_0 = 100\ \mathrm{kPa}$, $k = 500\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, $l_0 = 20\ \mathrm{cm}$, adiabatická konštanta $\kappa = 1{,}4$. Z grafu určte hodnoty posunutia y pre obidva prípady, ak posunutie $x = 50\ \mathrm{cm}$.

Vzduch považujte za ideálny plyn, trenie medzi piestami a valcom neuvažujte. Predpokladajte, že plyn je počas posúvania piestov v stave termodynamickej rovnováhy a obidva piesty sa posúvajú súčasne v jednom spoločnom smere.

4. Analýza pádu s odporom vzduchu – *experimentálna úloha*

Pri pohybe vo vzduchu pôsobí na telesá odpor vzduchu. Z vlastnej skúsenosti z jazdy na bicykli vieme, že odporová sila rastie so zväčšovaním rýchlosti pohybu. Odpor vzduchu pri páde telesa sa uplatňuje napr. pri páde parašutistu alebo pri páde dažďovej kvapky.

Úlohou experimentu je skúmanie voľného pádu telesa. Na experiment je výhodné použiť guľu z penového polystyrénu s polomerom približne 20 mm (tvar nemusí byť presná guľa - teleso je možné vyrezať do tvaru blízkeho guli z polystyrénovej kocky s hranou 40 mm obrúsením rohov). Pomocou váh určte hmotnosť m gule (okolo hodnoty 1,5 g). Keďže guľa padá veľmi rýchlo pre meranie času, použite filmový záznam pádu.

Na stenu priložte zvislé dĺžkové meradlo (pás s dĺžkovou mierkou) s dĺžkou 2 až 2,5 m. Vo veľkej vzdialenosti (okolo 5 až 10 m) umiestnite digitálny fotoaparát s možnosťou videozáznamu. Po zapnutí záznamu uvoľnite pri hornom okraji dĺžkového meradla vo výške okolo 2,5 m guľu a nechajte ju voľne padať. Fotoaparát urobí zvyčajne 30 snímok za sekundu (presnú hodnotu frekvencie snímok získate v menu „vlastnosti“ súboru nahratého videozáznamu). Pri analýze záznamu zvoľte krok po jednotlivých snímkach. Pre každú snímku zaznamenajte čas t od okamihu začiatku pohybu a dráhu x od horného miesta uvoľnenia až k danej snímke odčítaním z dĺžkového meradla. Takto za dobu pádu okolo 1 s získate 30 záznamov. Hodnoty t a x zaznamenajte do tabuľky.

a) Zostrojte graf funkcie $x = \mathrm{f}_1(t)$.
b) V tabuľke doplňte stĺpec v, do ktorého zapíšte hodnoty rýchlosti $v = \Delta x / \Delta t$ pre rozdiely získané zo susedných riadkov (numerická derivácia). Zostrojte graf funkcie $v = \mathrm{f}_2(t)$ a porovnajte ho s grafom rýchlosti voľného pádu bez odporu vzduchu $v = g\,t$.
c) Do ďalšieho stĺpca doplňte zrýchlenie a, určené zo susedných riadkov $a = \Delta v / \Delta t$. Zostrojte graf funkcie $a = \mathrm{f}_3(t)$ a porovnajte ho s grafom zrýchlenia $a = g$ voľného pádu bez odporu vzduchu.
d) Do ďalšieho stĺpca tabuľky doplňte veľkosť sily $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ odporu vzduchu, $F_\mathrm{o} = m\,(g - a)$.
e) Predpokladajte, že sila odporu vzduchu je daná funkciou $F_\mathrm{o} = k\,v^{\,n}$. Určte hodnoty k a n. Pre určenie týchto hodnôt je vhodné závislosť linearizovať zavedením nových premenných $y = \log v$ a $z = \log F_\mathrm{o}$. Dostanete tak lineárnu závislosť $z = b\,y + c$, ktorej grafom je priamka.
f) V tabuľke doplňte stĺpce $\log v$ a $\log F_\mathrm{o}$ a takto získané hodnoty vyneste do grafu so súradnicami y, z. Získanými bodmi veďte optimálnu (regresnú) priamku, určte hodnoty b, c a z nich vypočítajte hodnoty k a n.

Experiment zopakujte najskôr s pingpongovou loptičkou (polomer 20 mm, hmotnosť 2,7 g) a potom s touto loptičkou naplnenou vodou (polomer 20 mm, hmotnosť podľa množstva vody do 35 g). Porovnajte výsledky pre telesá rovnakých rozmerov s rôznymi hmotnosťami. Kedy je možné odpor vzduchu pri výpočtoch zanedbať?

5. Mars

Dňa 22. mája 2016 sa nachádzal Mars najbližšie k Zemi a jeho veľkosť zo Zeme dosiahla uhlový priemer $\varphi = 17{,}8''$ (uhlových sekúnd). Planétu poznali už starovekí astronómovia a pre svoje červené zafarbenie dostala aj meno po starorímskom bohovi vojny. Planéta má dva mesiace, pomenované Deimos (*hrôza*) a Fobos (*strach*) podľa synov boha Marsa.
Pozorovaním sa zistili nasledovné informácie: doba obehu Marsu okolo Slnka $T_\mathrm{M} = 686{,}96$ dňa (porovnajte s dobou obehu Zeme okolo Slnka $T_\mathrm{Z} = 365{,}25$ dňa po kružnici s polomerom $R_\mathrm{Z} = 1{,}50\times10^{11}$ m), Mars sa otáča okolo vlastnej osi, pričom bod na rovníku Maarsu sa pohybuje obvodovou rýchlosťou $v_\mathrm{r} = 868{,}22\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$, mesiac Deimos obieha okolo planéty Mars po kružnicovej trajektórii s polomerom $R_\mathrm{D} = 23\,460$ km a obežná doba $T_\mathrm{D} = 30{,}35$ h.
Pomocou uvedených informácií určte:

a) hmotnosť M_M a priemernú hustotu ρ_M Marsu,
b) dátum nasledujúceho maximálneho priblíženia Marsu k Zemi,
c) tiažové zrýchlenie g_M0 na póle a g_Mr na rovníku Marsu.
d) výsledky porovnajte s hodnotami uvedenými v odbornej literatúre a rozdiely vysvetlite.

Úlohu riešte všeobecne a pre dané hodnoty, Newtonova gravitačná konštanta $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$. Predpokladajte, že trajektórie obiehania Zeme i Marsu okolo Slnka a Deimosu okolo Marsu sú kružnice, trajektórie Zeme i Marsu sa nachádzajú v jednej rovine a povrch Marsu je dokonalá guľová plocha.

6. Hokej

Slovenský hokejista Zdeno Chára dosiahol v roku 2012 rekordnú rýchlosť strely puku v rámci NHL v_m = 175,1 km/h.

Celé hokejové ihrisko má rozmery $d_1 \times d_2$ = 60,00 m × 30,00 m. Bránkové čiary sú vo vzdialenosti d_3 = 4,00 m od zadného mantinelu. Plocha medzi bránkovými čiarami je rozdelená na polovicu červenou čiarou a na tretiny dvomi modrými čiarami. Tretina bližšia k vlastnej bránke je obranná, najvzdialenejšia od vlastnej bránky útočná, tretina medzi modrými čiarami je stredná.

a) Nakreslite náčrtok hracej plochy hokejového ihriska a vyznačte v ňom pre hru dôležité body a čiary, ako aj dané a počítané veličiny.
b) Zdeno Chára vystrelí puk zo stredu útočnej modrej čiary na bránku rýchlosťou v_m. Určte čas t_m, za ktorý puk prekoná vzdialenosť od modrej čiary k bránke, za ktorý musí brankár na strelu zareagovať, ak ju chce zachytiť.

V závere zápasu pri hre bez brankára sa brániaci hráč zmocnil puku v strede vlastnej obrannej modrej čiary a rozhodol sa vystreliť na prázdnu súperovu bránku. V ceste mu však stál obranca súpera v strede druhej modrej čiary. Rozhodol sa preto pre strelu odrazom od bočného mantinelu.

c) Určte vzdialenosť x od stredovej čiary miesta na mantineli, do ktorého treba namieriť strelu, aby puk po odraze od mantinelu zasiahol stred bránky. V obrázku vyznačte trajektóriu puku. Určte uhly α a β vzhľadom na mantinel, pod ktorými puk dopadne na mantinel a odrazí sa od neho.
d) Hráč vystrelil puk rýchlosťou v_2 = 100 km/h. Je možné, aby sa obranca súpera vrátil k bránke v opísanej situácii (c) a zabránil prechodu puku do bránky, ak viete, že obranca vzdialenosť zo svojej modrej obrannej čiary k bránke je schopný prejsť za dobu t_0 = 2,10 s?

Pri riešení predpokladajte, že pri odraze puku od mantinelu sa zložka rýchlosti rovnobežná s mantinelom nezmení a zložka rýchlosti kolmá na mantinel sa odrazom zmenší v pomere p = 0,75. Puk sa pozdĺž celej trajektórie pohybuje po ľade a faktor trenia medzi pukom a ľadom f = 0,0500. Tiažové zrýchlenie g = 9,81 m·s^{-2}.

7. Zrážka s meteoroidom

Vážne nebezpečenstvo pre kozmické lode predstavujú zrážky lode s drobnými telesami vo vesmíre. Uvažujte kozmickú loď, ktorá obsahuje vzduch s objemom $V = 1\,000\ \mathrm{m}^3$, tlakom $p_0 = 1{,}00\times10^5$ Pa a teplotou 27,0 °C. Do lode narazí malý meteoroid a v plášti lode vytvorí otvor s obsahom prierezu $S = 1{,}00\ \mathrm{cm}^2$, ktorým začne vzduch z lode unikať.

Určte čas τ po zrážke, za ktorý poklesne tlak vzduchu v lodi o 1,00 % pôvodnej hodnoty p_0 tlaku.

Molárna plynová konštanta $R = 8{,}31\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$, molárna hmotnosť vzduchu $M_\mathrm{m} = 29\times10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$. Teplotu v lodi uvažujte konštantnú a prúdenie vzduchu otvorom za laminárne.

59. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie C*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád 1, 2, 3, 6, 7, Ivo Čáp 4, 5
Spracovanie návrhov úloh a riešení:	Ivo Čáp, Ľubomír Konrád
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018