

59. ročník Fyzikálnej olympiády  
v školskom roku 2017/2018  
Kategória A – krajské kolo  
6. 2. 2018

Text úloh

### 1. Loptička na minigolfovej prekážke

Súčasťou minigolfovej trasy je šikmá rúra s dĺžkou  $l = 1,5$  m a nastaviteľným uhlom sklonu  $\alpha$  vzhľadom na vodorovnú rovinu. Na dolnom konci rúry sa nachádza homogénna loptička s hmotnosťou  $m = 40$  g a polomerom  $r = 20$  mm. Hráč udelí loptičke úderom palice začiatočnú rýchlosť  $v_0 = 3,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  v smere osi šikmej rúry (bez rotácie).

- Stručne opíšte dej. Nakreslite vhodný ilustračný obrázok a vyznačte v ňom vektory síl, ktoré pôsobia na loptičku počas jej pohybu vo vnútri rúry.
- Určte dráhu  $l_1$  loptičky vo vnútri rúry, na ktorej dosiahne uhlová rýchlosť  $\omega$  loptičky hodnotu  $\omega_1 = v_1 / r$ , kde  $v_1$  je rýchlosť pohybu hmotného stredu loptičky.
- Určte najmenšiu hodnotu  $v_{01}$  začiatočnej rýchlosti  $v_0$ , pre ktorú loptička dosiahne horný koniec rúry.

Faktor trenia medzi loptičkou a vnútorným povrchom rúry  $f = 0,13$ . Úlohu riešte pre uhly sklonu  $\alpha_1 = 20^\circ$  a  $\alpha_2 = 30^\circ$ .

Tiažové zrýchlenie  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Moment zotrvačnosti  $I$  homogénnej gule vzhľadom na jej os prechádzajúcu jej stredom  $I = \frac{2}{5} m r^2$ , kde  $m$  je hmotnosť a  $r$  polomer gule.

### 2. Kmity

Homogénna hliníková guľôčka s polomerom  $r$  je zavesená na dlhom pevnom a tenkom elektricky nevodivom vlákne, ktoré je horným koncom pripevnené k pružine s tuhosťou  $k$ , obr. A–1. Ak guľôčku vychýlime v zvislom smere z rovnovážnej polohy a uvoľníme, začne kmitať v zvislom smere.

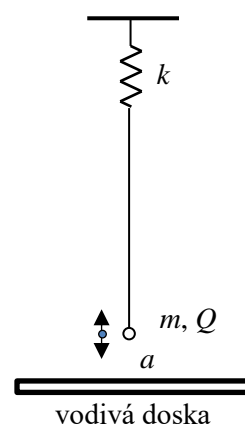
- Určte periódu  $T_0$  týchto kmitov.

Guľôčku zelektrizujeme nábojom  $Q$ .

- Určte maximálnu hodnotu  $Q_m$  náboja  $Q$ , aby elektrická intenzita na povrchu guľôčky neprekročila hodnotu elektrickej pevnosti vzduchu  $E_p$ .

Potom pod guľôčku do vzdialenosti  $a \gg r$  od jej stredu vložíme vodorovnú, dokonale vodivú rovinnú dosku, ktorej rozmery sú podstatne väčšie ako vzdialenosť  $a$  (modelovo nekonečne veľká).

- Nakreslite obrázok a znázornite v ňom pomocou siločiar priestorové rozloženie elektrostatického poľa (1) v prípade izolovanej guľôčky a (2) v prípade guľôčky s podloženou vodivou doskou.



Obr. A–1

Využite metódu zrkadlenia, podľa ktorej možno vodivú dosku nahradiť vhodne umiestnenou zelektrizovanou guľôčkou tak, aby pôvodné pole zostalo rovnaké a pod rovinou pôvodného povrchu dosky sa vytvorilo zrkadlovo symetrické elektrostatické pole ako pole nad rovinou povrchu dosky. Využite poznatok, že elektrická siločiar je vždy kolmá na povrch vodiča.

- d) Zistite, či sme schopní zmerať posunutie guľôčky v zvislom smere spôsobené podložením vodivej dosky, ak máme k dispozícii meradlo posunutia schopné určiť minimálne posunutie guľôčky  $\Delta x_{\min}$ .
- e) Zistite, či sme schopní zmerať zmenu periódy  $\Delta T$  kmitov guľôčky v zvislom smere spôsobenú podložením dosky, ak máme k dispozícii zariadenie s relatívnou presnosťou merania  $\delta T_{\min}$ .

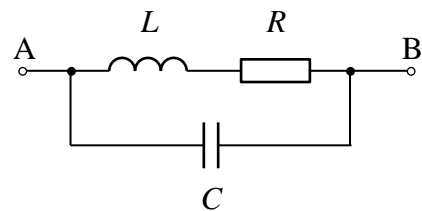
Hmotnosť vlákna a pružiny v riešení úlohy neuvažujte. Úlohu riešte všeobecne a pre hodnoty:  $\rho = 2,7 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  hustota hliníka,  $r = 5,0 \text{ mm}$ ,  $k = 0,50 \text{ N/m}$ ,  $\varepsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$  elektrická konštanta,  $E_p = 3,0 \text{ MV}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $Q = 2,5 \text{ nC}$ ,  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $\Delta x_{\min} = 10 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $\delta T_{\min} = 10^{-8}$ .

Pozn.: Pri úpravách použite približný vzťah  $(1 + y)^n \approx 1 + n y$  pre  $y \ll 1$ .

### 3. Vysokofrekvenčné vlastnosti rezistora

V obvodoch sa používajú súčiastky, u ktorých predpokladáme určité základné elektrické vlastnosti – rezistory s elektrickým odporom, kapacitory s elektrickou kapacitou a induktory s indukčnosťou. V niektorých prípadoch je potrebné brať do úvahy aj iné ich elektrické vlastnosti.

Uvažujme súčiastku rezistor. Jeho základnou vlastnosťou je elektrický odpor  $R$ . Keď rezistorom prechádza elektrický prúd, vzniká v jeho okolí magnetické pole, ktoré opisuje indukčnosť  $L$ . Medzi svorkami rezistora je napätie, tzn. v okolí rezistora vzniká elektrické pole, ktoré opisuje kapacita  $C$ . Funkciu rezistora v elektrickom obvode znázorňuje náhradná schéma, obr. A–2.



Obr. A–2

- a) Podľa náhradnej schémy na obr. A–2, rezistor predstavuje paralelný rezonančný obvod. Určte rezonančnú frekvenciu  $f_0$  tohto obvodu, tzn. frekvenciu, pri ktorej je komplexná admitancia  $Y = 1/Z$  reálna veličina, a podmienku jej existencie.
- b) Posúďte, pri akých frekvenciách rezistor má vlastnosti ideálneho rezistora, pri akých frekvenciách má induktívne a pri akých kapacitné vlastnosti. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

K svorkám A, B rezistora (obr. A–2) pripojíme zdroj harmonického elektrického napätia s efektívnou hodnotou  $U$  a frekvenciou  $f$ .

- c) Nakreslite fázorový diagram dvojpólu. Určte fázový rozdiel  $\varphi$  medzi napätím a prúdom na svorkách zdroja.
- d) Určte činný výkon  $P$  zdroja napätia.

Riešte všeobecne a pre hodnoty:  $R = 600 \text{ }\Omega$ ,  $L = 2,0 \text{ }\mu\text{H}$ ,  $C = 3,0 \text{ pF}$ ,  $U = 12 \text{ V}$ ,  $f = 80 \text{ MHz}$ .

#### 4. Optika

Mikroskopom chceme pozorovať jemnú priehľadnú mriežku tvorenú pásikmi s šírkou  $a = 650 \text{ nm}$  a vzájomnou vzdialenosťou ich pozdĺžnych osí  $b = 1,20 \text{ }\mu\text{m}$ . Mikroskop pozostáva z dvoch spojných šošoviek, objektívu s priemerom  $d_1 = 10 \text{ mm}$  a ohniskovou vzdialenosťou  $f_1 = 6,0 \text{ mm}$  a okuláru s ohniskovou vzdialenosťou  $f_2 = 6,0 \text{ cm}$ . Vzdialenosť šošoviek objektívu a okuláru  $L = 15 \text{ cm}$ . Mriežku pozorujeme v svetle s vlnovou dĺžkou  $\lambda = 520 \text{ nm}$ .

Pri prechode svetla cez mriežku dochádza k difrakcii svetla. Aby bolo možné rozlíšiť jednotlivé pásiky mriežky, treba objektívom zachytiť aspoň hlavný difrakčný lalok.

- Nakreslite obrázok znázorňujúci veličiny podstatné pre určenie charakteristických uhlov difrakčného obrazca a potrebné vzdialenosti šošovky objektívu od mriežky.
- Určte uhol  $\varphi_1$  prvého difrakčného maxima, ktoré treba objektívom zachytiť, aby mikroskop mohol pásiky mriežky rozlíšiť. Určte maximálnu vzdialenosť  $c_{\text{max}}$  šošovky objektívu od pozorovanej mriežky, aby zachytila difrakčné maximá rádu 0 a  $\pm 1$  difrakčného obrazca mriežky. Uveďte, čo by sme pozorovali, ak by vzdialenosť  $c > c_{\text{max}}$ .
- Nakreslite schému usporiadania šošoviek a určte vzdialenosť  $c$  mriežky od objektívu, aby sa okulárom vytvoril zdanlivý obraz  $O_2$  mriežky v konvenčnej zrakovej vzdialenosti  $l = 25 \text{ cm}$  od okuláru. Overte, či je splnená podmienka  $c < c_{\text{max}}$ .
- Určte uhlové zväčšenie  $z = \varphi/\varphi_0$ , kde  $\varphi$  a  $\varphi_0$  sú uhly, pod ktorými pozorujeme obraz  $O_2$  a predmet  $P_1$  z konvenčnej zrakovej vzdialenosti  $l$ . Posúďte, či je možné okom vidieť čiary mriežky priamo a s použitím mikroskopu, ak je rozlišovacia schopnosť ľudského oka  $\Delta\varphi = 1'$  (uhlová minúta). Predpokladajte, že uhly  $\varphi, \varphi_0 \ll 1 \text{ rad}$  a platia približné vzťahy  $\tan\varphi \approx \varphi$  a  $\tan\varphi_0 \approx \varphi_0$ .