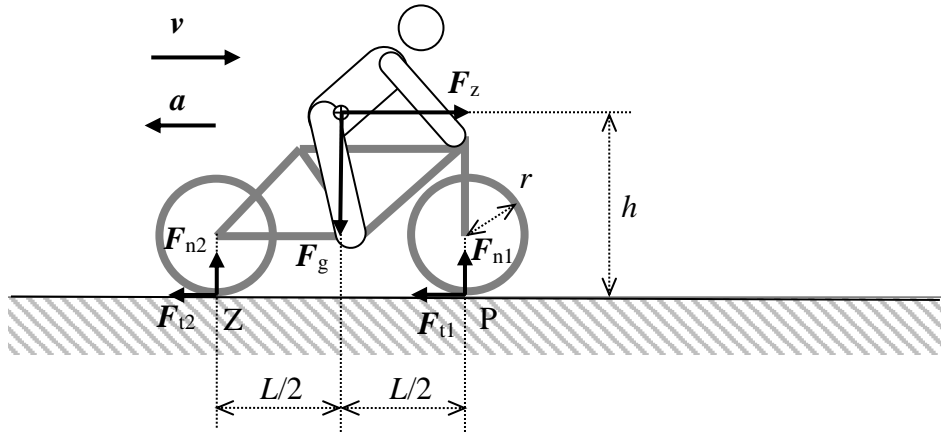


59. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2017/2018
Kategória C – krajské kolo
Riešenie úloh

1. Brzdenie na bicykli

Riešenie:

a) Obr. RC–1



Obr. RC–1

Na sústavu bicykel-cyklista pôsobia sily: tiažová sila $F_g = m g$, kde m je hmotnosť sústavy. V miestach dotyku kolies s vozovkou pôsobia proti smeru pohybu sily trenia F_{t1} , F_{t2} a tlakové sily vozovky F_{n1} , F_{n2} . V neinerciálnej sústave pôsobí zotrvačná sila $F_z = -m a$, ktorá v prípade brzdenia pôsobí v smere pohybu.

obrázok + opis 1 b

- b) Spomalenie sústavy pri brzdení spôsobujú sily trenia medzi kolesami a vozovkou. Trenie môže byť statické, keď sa kolesa nepreklzavajú (valivý pohyb), alebo šmykové, ak sú brzdy zablokované a kolesá sa neotáčajú (po povrchu vozovky sa šmýkajú). Brzdenie s využitím statického trenia je účinnejšie, lebo faktor statického trenia je väčší ako faktor šmykového trenia. Sila statického trenia môže nadobúdať hodnoty od nulovej až po maximálnu $F_{t \max} = f_s F_n$, tzn. $0 \leq F_t \leq f_s F_n$.

Vo vzťažnej sústave spojenjej s bicyklom sú v rovnováhe sily rovnobežné s vozovkou a sily kolmé na vozovku, a taktiež momenty síl

$$F_z - F_{t1} - F_{t2} = 0, \quad (1)$$

$$F_g - F_{n1} - F_{n2} = 0, \quad (2)$$

momenty síl vzhľadom na bod Z

$$F_{n1} L - F_g \frac{L}{2} - F_z h = 0 \quad (3)$$

alebo momenty síl vzhľadom na bod P

$$-F_{n2} L + F_g \frac{L}{2} - F_z h = 0. \quad (4)$$

Pre sily statického trenia máme

$$F_{t1} \leq f_s F_{n1} \quad \text{a} \quad F_{t2} \leq f_s F_{n2}. \quad (5)$$

Z (3) a (4) vidno, že moment zotrvačnej sily prenáša väčšiu silu na predné koleso a odľahčuje zadné koleso. To znamená, že brzdenie prednou brzdou je účinnejšie ako zadnou.

Brzdenie sa líši pri použití prednej alebo zadnej brzdy, prípadne oboch.

správne východiskové vzťahy a rovnosti 2 b

- i. Zadná brzda: v tomto prípade je $F_{t1} = 0$, $F_{t2} = m a$, tzn. $m a \leq f_s F_{n2}$.

Z rovnosti (4) máme

$$F_{n2} = \frac{1}{2} m g - \frac{h}{L} m a.$$

Potom platí

$$a \leq f_s g \frac{1}{2} \frac{L}{L + f_s h} = a_{1m}. \quad (6) \quad 1 \text{ b}$$

- ii. Predná brzda: v tomto prípade $F_{t2} = 0$, $F_{t1} = m a$, tzn. $m a \leq f_s F_{n1}$.

Z rovnosti (3) máme

$$F_{n1} = m g \frac{1}{2} + m a \frac{h}{L}$$

a pre zrýchlenie dostávame

$$a \leq f_s g \frac{1}{2} \frac{L}{L - f_s h} = a_{2m}. \quad (7) \quad 1 \text{ b}$$

Pri brzdení prednou brzdou pôsobí vzhľadom na bod P moment sily, ktorý odľahčuje zadné koleso. Ak klesne F_{n2} na nulovú hodnotu (strata kontaktu s vozovkou), začne sa bicykel s cyklistom otáčať a cyklista prepadne cez riadidlá na vozovku.

Podmienka stability polohy je $F_{n2} > 0$. Zo (4) dostávame

$$F_{n2} = \frac{1}{2} m g - \frac{h}{L} m a > 0, \text{ resp. } a < \frac{L}{2h} g = a_{2m}^*. \quad (8) \quad 1 \text{ b}$$

Maximálna veľkosť zrýchlenia je daná menšou z hodnôt a_{2m} , a_{2m}^* .

- iii. Predná i zadná brzda:

Pri veľmi citlivom zaťažovaní prednej i zadnej brzdy možno dosiahnuť maximálnu silu trenia na zadnom kolese $F_{t2\max} = f_s F_{n2}$ a na prednom kolese $F_{t1\max} = f_s F_{n1}$.

Maximálnu veľkosť zrýchlenia určíme z (1) a (2)

$$a_{3m} = f_s \frac{F_{n1} + F_{n2}}{m} = f_s g. \quad (9) \quad 1 \text{ b}$$

Opäť platí obmedzenie vyjadrené podmienkou (8).

- d) 1. V prvom prípade je $a_{1m} \approx 0,097 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{2m} \approx 0,099 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{3m} \approx 0,20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
a $a_{2m}^* \approx 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Najúčinnejšie je brzdenie oboma brzdami. Ak sa brzdí iba jednou brzdou, je účinnosť prednej i zadnej približne rovnaká, pričom s ohľadom na nebezpečenstvo šmyku predného kolesa, ktoré je nebezpečnejšie, je lepšie brzdiť zadnou brzdou. 1 b

2. V druhom prípade je $a_{1m} \approx 0,90 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{2m} \approx 1,07 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{3m} \approx 1,96 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
 a $a_{2m}^* \approx 11,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Najúčinnéjšie je brzdenie dvomi brzdami. Pri použití iba prednej alebo iba zadnej brzdy je účinok približne rovnaký a polovičný v porovnaní s brzdením dvomi brzdami. Rovnako ako v prvom prípade s ohľadom na možný šmyk predného kolesa je bezpečnejšie brzdiť zadnou brzdou. Prevrátenie cez riadidlá nehrozí. 1 b

3. V treťom prípade je $a_{1m} \approx 1,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{2m} \approx 6,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{3m} \approx 5,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
 a $a_{2m}^* \approx 5,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Brzdenie zadnou brzdou je bezpečné, ale málo účinné. Brzdenie prednou brzdou alebo obomi brzdami je oveľa účinnejšie, ale pri brzdení prednou brzdou alebo obomi brzdami sú vypočítané hodnoty spomalenia $6,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a $5,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ väčšie ako medzná hodnota $5,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, preto hrozí pri intenzívnom brzdení nebezpečenstvo prevrátenia cez riadidlá. 1 b

2. Elektrická sieť

Riešenie:

- a) Obr. RC-2. 1 b

- b) Pri vypnutom spínači S1 prechádza zdrojom nulový prúd, preto úbytok napätia na vnútornom odpore zdroja je nulový, a teda voltmeter určuje napätie naprázdno

$$U_z = U_{v1} = 120 \text{ V}. \quad 1 \text{ b}$$

Po zapnutí spínača S1, pri vypnutom spínači S2, sa uzavrie elektrický obvod zdroj–rezistor R_1 . Prúd prechádzajúci zdrojom v tomto prípade je

$$I_1 = \frac{U_z}{R_z + R_1}$$

a napätie na voltmetri

$$U_{v2} = R_1 I_1 = \frac{R_1 U_z}{R_z + R_1} = \frac{R_1 U_{v1}}{R_z + R_1}. \quad (1)$$

Zo vzťahu (1) určíme vnútorný odpor zdroja

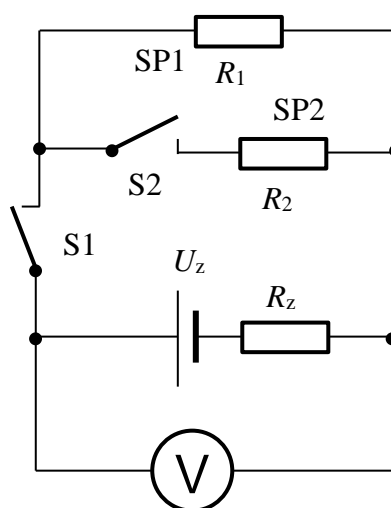
$$R_z = R_1 \frac{U_{v1} - U_{v2}}{U_{v2}}. \quad (2)$$

Pre dané hodnoty veličín $R_z \approx 2,2 \Omega$.

Po zapnutí oboch spínačov sú spotrebiče SP1 a SP2 spojené navzájom paralelne a prúd zdroja je

$$I_2 = \frac{U_z}{R_z + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Napätie medzi svorkami voltmetra v tomto prípade je



Obr. RC-2

(2) 2 b

$$U_{v3} = I_2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_z}{R_z + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = U_{v1} \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_z (R_1 + R_2)}.$$

Odtiaľ určíme odpor spotrebiča

$$R_2 = \frac{U_{v3} R_z R_1}{U_{v1} R_1 - U_{v3} (R_1 + R_z)} = \frac{U_{v3} (U_{v1} - U_{v2})}{U_{v1} (U_{v2} - U_{v3})} R_1. \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty veličín $R_2 \approx 13,9 \Omega$.

c) Pri vypnutom spínači S1 je prúd nulový.

Po zapnutí spínača S1, pri vypnutom spínači S2, je prúd zdroja

$$I_1 = \frac{U_{v2}}{R_1}. \text{ Pre dané hodnoty veličín } I_1 \approx 2,3 \text{ A.} \quad (3) \quad 1 \text{ b}$$

Ak sa zapne i spínač S2, je prúd zdroja

$$I_2 = \frac{U_{v3}}{R_1} + \frac{U_{v3}}{R_2} = \frac{U_{v2}}{R_1} \frac{U_{v1} - U_{v3}}{U_{v1} - U_{v2}}. \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty veličín $I_2 \approx 9,2 \text{ A}$. (4)

d) Tepelný výkon P sa uvoľňuje v zdroji na vnútornom odpore R_z , (výraz (2)) pričom platí $P = R_z I^2$.

V prvom prípade je prúd daný výsledkom (3) a tepelný výkon v zdroji je

$$P_1 = R_z I_1^2. \text{ Pre vypočítané hodnoty } P_1 \approx 12 \text{ W.} \quad 1 \text{ b}$$

Po zapnutí spínača S2 je prúd zdroja (4) a tepelný výkon uvoľnený v zdroji

$$P_2 = R_z I_2^2. \text{ Pre vypočítané hodnoty } P_2 \approx 186 \text{ W.} \quad 1 \text{ b}$$

Z výsledku vidno, že po pripojení ilegálneho spotrebiča sa výrazne naruší elektrická sieť a výrazne sa zväčší tepelné zaťaženie zdroja, ktorým sa môže zničiť.

3. Zohrievanie dusíka

Riešenie:

a) Zo stavovej rovnice platí

$$\frac{p_z V_z}{T_z} = \frac{p_k V_k}{T_k} = nR$$

odkiaľ máme

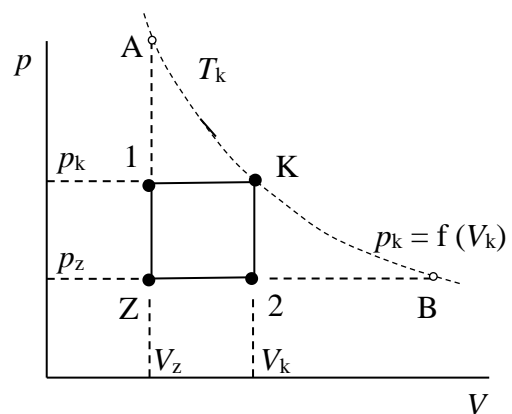
$$p_k = nRT_k \frac{1}{V_k} = \text{konšt.} \frac{1}{V_k}. \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

Grafom tejto funkcie $p_k = f(V_k) = \text{konšt}/V_k$ v sústave p - V je hyperbola.

Graf funkcie (1) je znázornený čiarkovane na obr. RC-3. 1 b

Stav plynu sa mení zo stavu Z izochoricky do stavu 1, a potom izobaricky do stavu K. Nasleduje izochorická zmena do stavu 2 a izobarický návrat do stavu Z.

graf cyklu a opis 1 b



Obr. RC-3 – obrázok (a)

- b) Pri izochorickom deji je práca plynu nulová, pri izobarickom $W = p \Delta V$. Počas deja 1–K práca vykonaná dusíkom $W_1 = p_k (V_k - V_z) > 0$, počas deja 2–Z práca vykonaná dusíkom $W_2 = p_z (V_z - V_k) < 0$. Celková práca vykonaná dusíkom počas cyklu

$$W = (p_k - p_z)(V_k - V_z) = nRT_k \left(\frac{V_z}{V_k} - \frac{T_z}{T_k} \right) \left(\frac{V_k}{V_z} - 1 \right) = nRT_k (x - y) \left(\frac{1}{x} - 1 \right). \quad 2 \text{ b}$$

Stav dusíka vyjadrený bodom K sa nachádza na krivke (1) medzi bodmi $A \equiv (V_z, p_A)$ a $B \equiv (V_B, p_z)$,

kde $x_B = \frac{V_z}{V_B} = \frac{T_z}{T_k} = y$ a $x_A = 1$. Odtiaľ máme rozsah premennej $x \in (1; y)$ 1 b

Počas izochorického deja Z–1 je práca plynu nulová, a teplo dodané dusíku $Q_1 = \Delta U_1 = C_V (T_1 - T_z)$. Počas izobarického deja 1–K je teplo dodané dusíku $Q_2 = C_p (T_k - T_1)$, kde $C_V = \frac{s}{2} nR$ a $C_p = C_V + nR$ (C_V a C_p sú tepelné kapacity dusíka pri konštantnom objeme a pri konštantnom tlaku).

Teplota $T_1 = T_z \frac{p_1}{p_z} = T_z \frac{p_k}{p_z} = V_z T_k \frac{1}{V_k}$.

Po dosadení do vzťahov pre Q_1 a Q_2 dostávame pre celkové teplo dodané dusíku

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_V T_k \left(\frac{V_z}{V_k} - \frac{T_z}{T_k} \right) + C_p T_k \left(1 - \frac{V_z}{V_k} \right) = nRT_k \left[\frac{s}{2} (x - y) + \frac{s+2}{2} (1 - x) \right]. \quad 2 \text{ b}$$

- c) Účinnosť termodynamického cyklu dusíka

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{(x - y) \left(\frac{1}{x} - 1 \right)}{\frac{s}{2} (x - y) + \frac{s+2}{2} (1 - x)}. \quad 1 \text{ b}$$

Po dosadení niekoľkých hodnôt do tohto vzťahu máme (pre dané hodnoty $s = 5$ a $y = 0,80$)

| x | $\eta / \%$ | x | $\eta / \%$ |
|------|-------------|-------|-------------|
| 0,80 | 0 | 1,00 | 0 |
| 0,85 | 1,36 | 0,95 | 1,43 |
| 0,89 | 1,82 | 0,91 | 1,84 |
| 0,90 | 1,851 | 0,905 | 1,852 |

Maximálna účinnosť sa dosiahne pri $x \approx 0,90 \div 0,91$ a dosahuje hodnotu $\eta_m \approx 1,85 \%$.

1 b

4. Asteroid 2018 AJ

Riešenie:

- a) Vzdialenosť d_1 asteroidu od Zeme

$$d_1 = r_z - r_{\min} \approx 0,0143 \text{ AU} \approx 2,15 \times 10^6 \text{ km.}$$

Vzdialenosť Mesiaca od Zeme $r_M = 2,56 \times 10^{-3} \text{ AU}$,

tzn. $\frac{d_1}{r_M} \approx 5,6$. Bolo to naozaj veľmi tesné priblíženie. 2 b

- b) Periódu T_a asteroidu určíme pomocou 3. Keplerovho zákona a známych parametrov obehu Zeme ($r_Z = 1$ AU, $T_Z = 1$ r) okolo Slnka. Dvojnásobok hlavnej polosi trajektórie asteroidu $2a_a = r_{\min} + r_{\max}$. Pre pomer dôb obehu okolo Slnka

$$\left(\frac{T_Z}{T_a}\right)^2 = \left(\frac{a_Z}{a_a}\right)^3 = \left(\frac{2r_Z}{r_{\min} + r_{\max}}\right)^3.$$

Odtiaľ máme

$$T_a = \left(\frac{r_{\min} + r_{\max}}{2r_Z}\right)^{3/2} T_Z \approx 1,694 \text{ r} = 1 \text{ r } 253 \text{ d.} \quad 2 \text{ b}$$

Ak k dátumu 5. 2. 2018 pripočítame čas periódy, tzn. 5.2.2019 + 253 dní. Po započítaní jednotlivých mesiacoch: feb 23, mar 31, apr 30, maj 31, jun 30, jul 31, aug 31, sept. 30, okt 31 – 280 dní, tzn. 253 dní je dňa 16. 10. 2019. 1 b

Za čas T_a sa vráti asteroid do miesta P (perihélia) a sprievodič Zeme opíše uhol

$$\varphi_Z = \omega_Z T_a = \frac{2\pi}{T_Z} T_a, \text{ pre dané hodnoty } \varphi_Z \approx 10,64 \text{ rad} \approx 609,4^\circ = 3 \times 180^\circ + 69,4^\circ.$$

Za čas do druhého prechodu asteroidu perihéliom urobí Zem uhlovú dráhu $609,4^\circ$ (jeden celý obeh a $249,4^\circ = 180^\circ + 69,4^\circ$ ($\Delta\varphi = 69,4^\circ$), bod Z_2 na obr. RC-4. 2 b

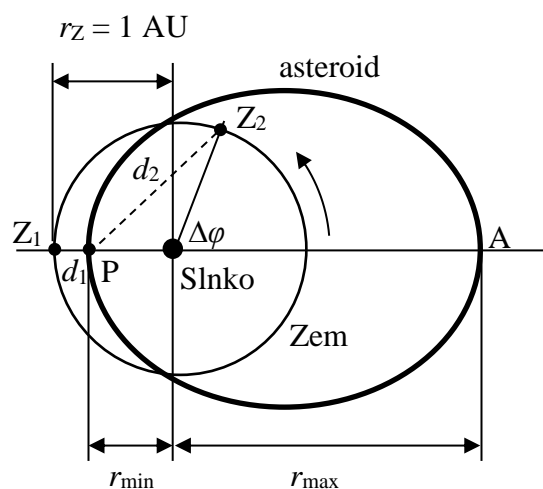
- c) V čase druhého prechodu asteroidu bodom P je Zem v polohe Z_2 . Vzdialenosť asteroidu od Zeme

$$d_2 = \sqrt{(r_{\min} + r_Z \cos \Delta\varphi)^2 + (r_Z \sin \Delta\varphi)^2}.$$

Pre dané hodnoty $d_2 \approx 1,63$ AU. 2 b

- d) Prechod perihéliom sa opakuje každých $T_a = 1,694$ roka. Asteroid sa dostane na spojnicu Zem Slnko ak násobok nT_a bude celé číslo (s presnosťou $< 0,1\%$). Ak vytvoríme rad hodnôt nT_a , zistíme, že podmienka je splnená za 22 rokov (po $n = 13$ obehoch asteroidu, $13 \times 1,694 \text{ r} = 22,02 \text{ r}$, tzn. 22 s presnosťou $0,09\%$). To zodpovedá dátumu február 2040. 1 b

Pozn.: Ďalšie extrémne priblíženia jan 2057, feb 2062, dec 2073, jan 2079 ...



Obr. RC-4

59. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy krajského kola kategórie C

| | |
|--|---|
| Autori návrhov úloh: | Dušan Nemeč (1), Ľubomír Konrád (2), Ivo Čáp (3,4) |
| Spracovanie návrhov úloh a riešení: | Ivo Čáp |
| Recenzia a úprava úloh a riešení: | Daniel Klivanec, Ľubomír Mucha |
| Preklad textu úloh do maďarského jazyka: | Aba Teleki |
| Redakcia: | Ivo Čáp |
| | Slovenská komisia fyzikálnej olympiády |
| Vydal: | IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018 |