

60. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2018/2019
kategória A

Riešenie úloh domáceho kola

1. LIDAR

Riešenie:

- a) Laser generuje impulzy s periódou $\tau_0 = 1/f_0$. V okamihu vyslania prvého impulzu je vzdialenosť medzi vozidlami l_0 . Impulz dopadne na druhé vozidlo za dobu $t_1 = \frac{1}{c} (l_0 + v t_1)$, odkiaľ máme

$$t_1 = \frac{l_0}{c - v},$$

pričom vzdialenosť vozidiel v okamihu dopadu impulzu na druhé vozidlo $l_1 = l_0 + (v - v_0) t_1$. Do vyslania nasledujúceho impulzu za čas τ_0 sa vzdialenosť zmení na $l_0 + (v - v_0) \tau_0$. Za dobu Δt_2 šírenia druhého impulzu k druhému vozidlu impulz prejde vzdialenosť

$$c \Delta t_2 = l_0 + (v - v_0) \tau_0 + v \Delta t_2, \text{ odkiaľ}$$

$$\Delta t_2 = \frac{l_0 + (v - v_0) \tau_0}{c - v}.$$

Druhý impulz dorazí od druhého vozidla v čase $t_2 = \tau_0 + \Delta t_2$.

Doba medzi dopadmi po sebe nasledujúcich impulzov na 2. vozidlo

$$\tau_1 = t_2 - t_1 = \tau_0 + \frac{l_0 + (v - v_0) \tau_0}{c - v} - \frac{l_0}{c - v} = \frac{c - v_0}{c - v} \tau_0. \quad 2 \text{ b}$$

- b) V čase t_1 odrazu prvého impulzu je vzdialenosť medzi vozidlami

$$l_1 = l_0 + (v - v_0) \frac{l_0}{c - v} = \frac{c - v_0}{c - v} l_0.$$

Po odraze prejde za dobu návratu Δt_3 impulz vzdialenosť $l_3 = l_1 - v_0 \Delta t_3 = c \Delta t_3$, odkiaľ

$$\Delta t_3 = \frac{l_1}{c + v_0} = \frac{(c - v_0) l_0}{(c + v_0)(c - v)}.$$

Čas dopadu na detektor LIDARu

$$t_3 = t_1 + \Delta t_3 = \frac{l_0}{c - v} + \frac{(c - v_0) l_0}{(c + v_0)(c - v)} = \frac{2c l_0}{(c - v)(c + v_0)}.$$

V čase t_2 odrazu druhého impulzu od druhého vozidla je vzdialenosť medzi vozidlami

$$l_2 = l_0 + (v - v_0)(\tau_0 + \Delta t_2) = \frac{c - v_0}{c - v} l_0 + \frac{(v - v_0)(c - v_0)}{c - v} \tau_0$$

Naspäť k 1. vozidlu impulz prejde za čas Δt_4 vzdialenosť $l_4 = c \Delta t_4 = l_2 - v_0 \Delta t_4$, odkiaľ

$$\Delta t_4 = \frac{l_2}{c + v_0} = \frac{(c - v_0)l_0 + (v - v_0)(c - v_0)\tau_0}{(c - v)(c + v_0)}.$$

Čas dopadu druhého impulzu na detektor LIDARu $t_4 = t_2 + \Delta t_4$.

Rozdiel časov dopadu impulzov na detektor

$$\tau_2 = t_4 - t_3 = \frac{(c + v)(c - v_0)}{(c - v)(c + v_0)} \tau_0. \quad 2 \text{ b}$$

c) Rozdiel intervalu τ_2 a intervalu τ_0 vysielaných impulzov

$$\Delta \tau_2 = \tau_2 - \tau_0 = \frac{2c\tau_0}{(c - v)(c + v_0)} (v - v_0). \quad 1 \text{ b}$$

Odtiaľ vyjadríme rýchlosť 2. vozidla

$$v - v_0 = \frac{\Delta \tau (c^2 - v_0^2)}{2c\tau_0 + \Delta \tau (c + v_0)} = \frac{c}{2} \frac{\Delta \tau}{\tau_0} \frac{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}{1 + \frac{\Delta \tau}{2\tau_0} \frac{c + v_0}{c}}.$$

Keďže platí $v, v_0 \ll c$, možno vyjadriť výsledný vzťah v približnom tvare

$$v - v_0 \approx \frac{c}{2} \frac{\Delta \tau}{\tau_0}. \quad 1 \text{ b}$$

Na rozlíšenie rozdielu rýchlostí $v - v_0 \approx 10 \text{ km/h}$ treba pri $\tau_0 = 1,0 \text{ ms}$ meranie časového rozdielu $\Delta \tau \approx 18,5 \text{ ps}$. 1 b

d) Najprv určíme hustotu kvapiek vo vzduchu behom dažďa. Ak za $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$ dopadne na zem 10 mm vody, na 1 m^2 pripadá objem $0,01 \text{ m}^3$, tzn. počet kvapiek $N = 0,01/4,2 \times 10^{-9} \approx 2,4 \times 10^6$. Na 1 m^3 tak pripadá $N_0 = N/(3\,600 \text{ s} \times 10 \text{ m/s}) \approx 66 \text{ kvapiek/m}^3$.

K zrážke nedôjde, ak do lúča nezasahuje žiadna kvapka, tzn. na objem valca s dĺžkou l a priemerom $D+d$ pripadá jedna kvapka, teda

$$\pi \left(\frac{D+d}{2}\right)^2 l N_0 = 1, \text{ a odtiaľ } l \approx 193 \text{ m}. \quad 2 \text{ b}$$

Vidíme, že ani silný dážď neobmedzuje použitie LIDARu na vzdialenosť približne do 200 m .

e) Výhody:

- LIDAR je schopný merať rýchlosť vozidla na vzdialenosť aj vyššie 1 km .
- Vzhľadom na presné zameranie vozidla úzkym laserovým zväzkom a vzhľadom na jednoduché prepojenie s fotoaparátom, môže súčasne s meraním urobiť aj fotografiu zameraného automobilu spolu s evidenčným číslom.
- LIDAR pracuje na veľké vzdialenosti i pri zhoršených poveternostných podmienkach.

Nevýhody:

- Laserový zväzok je úzky a potrebuje pre odraz naspäť vhodnú plochu kolmú na smer dopadajúceho lúča, čo môže byť problém
- Vyhodnotenie signálu za účelom určenia rýchlosti je zložitejšie ako u dopplerovského radaru

- Existujú pomerne náročné systémy „rušičky“, ktoré sú schopné urobiť vozidlo „neviditeľné“ pre laserový lúč, sú ale drahé a náročné na nastavenie, a preto ich rozšírenie medzi vodičmi sa neočakáva
- nevýhoda z pohľadu vodiča – systém vysiela impulzy iba počas merania, ak aj vodič svojím jednoduchým detekčným zariadením zaznamená dopad meracieho zväzku, nestačí už pribrzdiť, ak prekračuje rýchlosť; u klasických dopplerovských radarov sa meria na vzdialenosť do 60 m, ale signál radaru sa dá zachytiť už vo vzdialenosti vyše 200 m, čo vodičovi poskytuje dost' času na pribrzdenie, ak treba.

1 b

2. Blood Moon - Krvavý Mesiac

Riešenie:

Hodnoty použité v riešení:

Mesiac: siderický mesiac $T_{M(\text{tab})} = 27,321\,661$ d, synodický mesiac $T_M^* = 29,530588$ d, priemer Mesiaca $d_M = 3\,476$ km, priemerná obežná rýchlosť $v_M = 1,022$ km·s⁻¹, hlavná polos eliptickej trajektórie obehu Mesiaca okolo Zeme $a = 384\,400$ km, pericentrum $r_{M \text{ min}} = 363\,104$ km, sklon roviny trajektórie voči ekliptike $\alpha = 5,145^\circ$, Saros cyklus 18 r 11 d 8 h.

Zem: Hmotnosť $M_Z = 5,9742 \cdot 10^{24}$ kg, polomer $R_Z = 6\,378$ km, stredná vzdialenosť Zeme od Slnka $d_{ZS} = 149,6$ mil. km, $d_{ZS \text{ max}} = 152,098$ mil. km (afélium), siderický rok $T_Z = 365,256366$ d

Slnko: Polomer $R_S = 6,96 \cdot 10^8$ m

Konštanty: Newtonova gravitačná konštanta $G = 6,6742 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

- a) Ak vychádzame z rovnováhy gravitačnej a zotrvačnej sily, máme

$$G \frac{M_Z M_M}{r^2} = M_M \left(\frac{2\pi}{T_M} \right)^2 r, \text{ kde } r \text{ je polomer kružnicovej trajektórie.}$$

Ak nahradíme polomer r dĺžkou hlavnej polosi trajektórie, dostávame

$$T_M = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_Z}}. \text{ Pre dané hodnoty } T_M \approx 2,371458 \cdot 10^6 \text{ s} \approx 27,447431 \text{ d.} \quad 1 \text{ b}$$

Ide o siderickú dobu obehu (v inerciálnej sústave vzhľadom hviezdy).

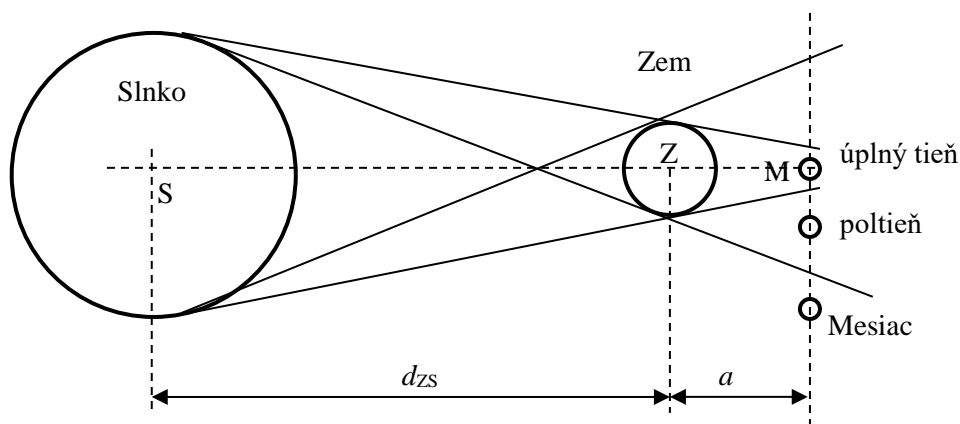
Meraním zistená hodnota $T_{M\text{tab}} = 27,321\,661$ d sa líši od vypočítanej o 0,126 d (0,46 %).

Malá odchýlka súvisí najmä s vplyvom gravitačnej sily Slnka.

1 b

Sústava spojená so Zemou je vzhľadom na pohyb okolo Slnka neinerciálna.

- b) Ako je znázornené na obr. RA-1, k zatmeniu Mesiaca dochádza, ak je Mesiac na spojnici SM Slnko–Mesiac v úplnom tieni Zeme. Fázy Mesiaca na spojnici Z–S sú spln (na odvrátenej strane od Slnka) a nov (na strane privrátenej k Slnku).



Obr. RA-1

Obrázok RA-1

1 b

Z podobnosti trojuholníkov určíme priemery d_U úplného tieňa a d_P polotieňa (pre veľmi malé uhly vzhľadom na spojnicu SZ)

$$\frac{R_Z - r_U}{a} = \frac{R_S - R_Z}{d_{ZS}}, \quad \text{a teda} \quad d_U = 2r_U = 2 \left[R_Z - \frac{a}{d_{ZS}} (R_S - R_Z) \right]. \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

Podobne

$$d_P = 2 \left[R_Z + \frac{a}{d_{ZS}} (R_S + R_Z) \right]. \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $d_U \approx 9\,212$ km, $d_P \approx 16\,366$ km.

2×0,5 b

Pomer priemeru Mesiaca a priemeru úplného tieňa $d_M/d_U \approx 0,377$. Pomer priemeru Mesiaca a priemeru polotieňa $d_M/d_P \approx 0,212$.

Z výsledku vidíme, že v čase splnu, keď je Mesiac na odvrátenej strane od Slnka, sa môže Mesiac skryť, dokonca na dlhší čas, celý v úplnom tieni Zeme, napriek tomu, že je práve fáza splnu.

Pozn.: Rovnaká situácia môže nastať, keď je Mesiac na spojnici Z-S na privrátenej strane k Slnku, vtedy dochádza k zatmeniu Slnka. Keďže je uhlová veľkosť Slnka a Mesiaca prakticky rovnaká pri pozorovaní zo Zeme, dochádza k úplnému zatmeniu Slnka iba na veľmi krátky čas.

- c) Doba zatmenia je daná časom prechodu Mesiaca cez úplný tieň. Najdlhší čas prechodu zodpovedá prípadu, keď Mesiac prechádza cez stred tieňa, tzn. prekoná celý priemer tieňa. Tieň má najväčší priemer, ak je Zem v perihéliu (d_{ZS} má minimálnu hodnotu) a Mesiac sa nachádza v pericentru (najmenšia vzdialenosť Mesiaca od Zeme). Maximálny priemer tieňa určíme podľa vzťahu (1), pričom dosadíme $d_{ZS} \rightarrow d_{ZS \max}$ a $a = r_{\min}$

Po dosadení do vzťahu (1) máme $d_{U \max} = 9\,463$ km.

Obežná rýchlosť Mesiaca okolo Zeme $v = a (2\pi/T_M)$, po dosadení $v \approx 1,022$ km/s.

Úplné zatmenie zodpovedá dráhe úplného zakrytia $\Delta d = d_U - d_M$. Táto vzdialenosť sa javí vzhľadom na stred Zeme pod uhlom $\varphi_Z = \Delta d / r_M$. Ak označíme čas zatmenia t_z , prejde za tento čas Zem na orbite okolo Slnka uhol $\Delta\varphi = (2\pi/T_Z) t_z$. Pri postupe tieňom Mesiac prejde uhol

$$\varphi_z + \Delta\varphi = \frac{2\pi}{T_M} t_z .$$

Po úprave dosadením za φ_z a $\Delta\varphi$, a ak uvážime, že $t_{z \max}$ zodpovedá $d_{U\max}$ a $r_{M\min}$, máme

$$t_{z \max} = \frac{1}{2\pi} \frac{d_{U\max} - d_M}{r_{M\min}} \frac{T_M T_Z}{T_Z - T_M} .$$

Pre dané hodnoty $t_{z \max} \approx 6\,699 \text{ s} \approx 112 \text{ min}$. 1 b

Pri splnení všetkých optimálnych okolností dosahuje doba zatmenia hodnotu 112 min.

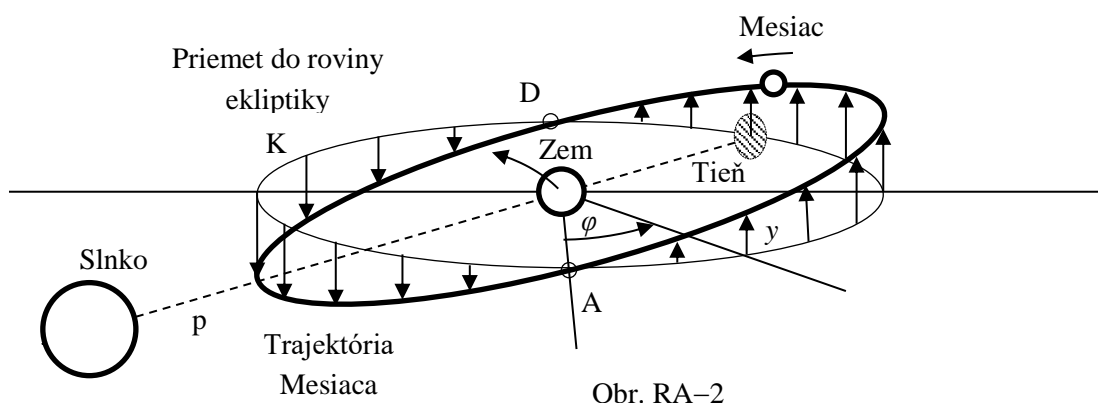
Dňa 27. 7. 2018 sa pozorovalo zatmenie, ktoré trvalo 104 min, čo sa veľmi približuje maximálnej hodnote.

- d) Siderická doba sa určuje vo vzťažnej sústave spojenjej s hviezdami (inerciálnej), synodická doba v sústave spojenjej s rotujúcou Zemou, tzn. pozorovanou pozorovateľom na Zemi.

Mesiac obieha okolo Zeme v rovnakom zmysle ako Zem okolo Slnka. Za čas jedného roku sa tak „ušetrí“ jeden obchod Mesiaca okolo Zeme

$$\frac{T_Z}{T_Z - T_M} = \frac{T_M^*}{T_M} , \text{ a teda } T_M^* = \frac{T_Z}{T_Z - T_M} T_M . \text{ Pre dané hodnoty } T_M^* \approx 29,530588 \text{ d.} \quad 1 \text{ b}$$

- e) Rovina trajektórie Mesiaca má sklon voči ekliptike $\alpha = 5,145^\circ$.



Situáciu znázorňuje obr. RA-2. Kruh tieňa má stred v rovine ekliptiky, ale vzdialenosť y Mesiaca od ekliptiky sa mení od nulovej hodnoty v uzloch A (ascending), D (descending) až po maximálnu hodnotu $y_m = a \sin\alpha \approx 34\,472 \text{ km}$. Vzhľadom na polomer úplného tieňa $4\,730 \text{ km}$, polomer polotieňa $8\,183 \text{ km}$ a polomer Mesiaca $1\,738 \text{ km}$ je zrejmé, že pri y_m je v čase splnu Mesiac veľmi ďaleko od hranice tieňa a Mesiac na oblohe plne žiari.

Pri obíhaní Zeme okolo Slnka sa priamka p natáča za jeden mesiac o uhol $\Delta\varphi = 360^\circ \times T_m^*/T_Z = 29,1^\circ$. Pre prípad stredu intervalu $\Delta\varphi$ v uzle, t.j. $\pm 14,6^\circ$ je v krajnej polohe $y = 8\,724 \text{ km}$. Ak nastane spln na okraji tohto intervalu, vstúpi Mesiac takmer polovicou obsahu do polotieňa a rovnako o mesiac vstúpi pri splne do polotieňa na druhej strane. Tak môžu nastať dve čiastočné zatmenia počas dvoch splnov za sebou. Tento prípad je však veľmi zriedkavý. Bežne je stred mimo uzla, a potom je zatmenie výraznejšie. Pri obíhaní Zeme okolo Slnka prechádza priamka p (spojnica S-Z) dvakrát do roka uzlami trajektórie Mesiaca (priesečníkmi s ekliptikou). Ak nastane spln v tomto čase, prechádza Mesiac tieňom Zeme a pozorujeme

zatmenie Mesiaca. Ak je Mesiac v čase splnu presne v uzle, prechádza Mesiac stredom tieňa a doba zatmenia je najdlhšia (pozri časť c)). Ak je Mesiac v čase splnu iba v blízkosti uzla, prejde Mesiac bližšie k hornému alebo dolnému okraju tieňa a doba zatmenia je tak kratšia. Pre $y < 2\,868$ km, t.j. uhol $\varphi < 4,75^\circ$, zmizne Mesiac na určitý čas v úplnom tieni Zeme a dôjde k úplnému zatmeniu. Za rok prejde uzlom Mesiac dvakrát, raz uzlom A, raz uzlom D. Zatmenie sa uskutoční počas splnu najmenej dvakrát do roka, pričom zatmenie môže byť úplné alebo čiastočné. 1 b

- f) Dva nasledovné prechody rovnakým uzlom majú periódu rovnú siderickému mesiacu. Za 13 siderických mesiacov sa Mesiac oneskorí o 10,074 d za dĺžkou roku, tzn. uzlový bod sa posunie za rok o $9,93^\circ$ proti smeru obehu Mesiaca. Okrem toho sa posunie uzlový bod o $10,07^\circ$ v dôsledku precesie, tzn. ročný posun uzlového bodu je približne 20° . Znamená to, že po $360^\circ/20^\circ = 18$ rokoch sa zopakujú pomery výskytu uzlového bodu na priamke S–Z, tzn. zatmenie sa po 18 rokoch reprodukuje. Presne 18 r 11 d 8 h predstavuje tzv. Sarosovu periódu, ktorá bola známa už v staroveku. Ak sa 27. júla 2018 vyskytol „Krvavý Mesiac“, predchádzajúci „Krvavý Mesiac bol 16. júla 2000 v dĺžke trvania zatmenia 106 min. Ďalší „Krvavý Mesiac“ teda možno očakávať v 7. augusta 2036. 1 b

3. Spínaný menič

Riešenie:

- a) Ak pripojíme induktor na zdroj konštantného napätia, dostávame uzatvorenú slučku, v ktorej platí podľa 2. Kirchhoffovho zákona platí $U_v = R_v i_L + u_L$. Napätie na induktore vyjadruje Faradayov indukčný zákon, z ktorého vyplýva vzťah medzi napätím a prúdom $u_L = L \frac{di_L}{dt}$. Pre obvod zdroja a induktora potom máme

$$U_v = R_v i_L + L \frac{di_L}{dt}, \text{ odkiaľ dostávame } \frac{di_L}{dt} = \frac{U_v}{L} - \frac{R_v}{L} i_L = \left(\frac{U_v}{R_v} - i_L \right) \frac{R_v}{L}. \quad (1)$$

Keďže na začiatku je výraz v zátvorke kladný, tzn. derivácia je kladná, prúd i_L narastá, výraz v zátvorke sa znižuje a nárast prúdu sa spomaľuje. Ak $i_L \rightarrow U_v/R_v = I_m$, pravá strana, a teda derivácia prúdu, klesá k nule, tzn. narastanie prúdu sa zastaví. Časovú závislosť prúdu $i_L(t)$ opisuje funkcia, ktorá od začiatkovej nulovej hodnoty monotónne rastie až k maximálnej hodnote I_m , ktorá predstavuje ustálenú (a teda maximálnu) hodnotu prúdu po dostatočne dlhom čase.

V krátkom čase po zapnutí, keď $i_L \ll U_v/R_v$, zo vzťahu (1) platí približne

$$\frac{di_L}{dt} \approx I_m \frac{R_v}{L} = k_{RL}, \text{ odkiaľ dostávame funkciu lineárnej závislosti prúdu od času}$$

$$i(t) = k_{RL} t = \frac{U_v}{L} t. \quad (2)$$

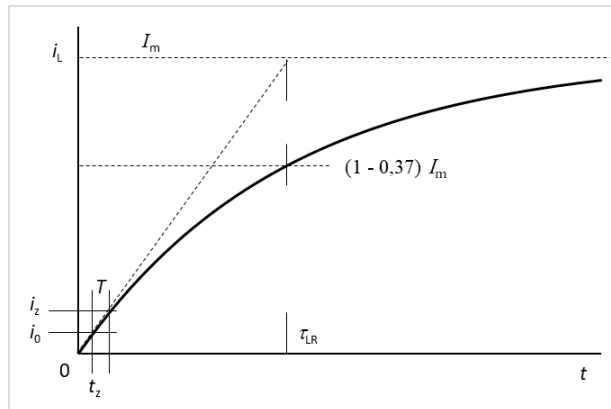
Časová konštanta L–R obvodu je $\tau_{LR} = \frac{L}{R_v}$.

Za čas τ_{RL} by prúd dosiahol hodnotu $i_\tau = k_{RL} \tau_{RL} = I_m$. Vidíme, že časová konštanta predstavuje čas, za ktorý by prúd pri začiatkovej lineárnej náraste dosiahol maximálnu hodnotu I_m .

Pre veľmi malú hodnotu R_v môže byť čas lineárneho nárastu dosť dlhý.

Pozn.: Riešením diferenciálnej rovnice (1) možno odvodiť vzťah pre prúd ako funkciu času

$i_L = I_m (1 - e^{-t/\tau_{LR}})$. Znamená to, že za čas τ_{LR} narastie prúd na hodnotu $i_\tau \approx 0,63 I_m$.



Obr. RA-3

- b) Ak k nabitému kapacitoru so začiatočným napätím u_0 pripojíme rezistor, začne obvodom prechádzať vybíjací prúd i_C , pričom platí $u_C = u_R$, kde $u_R = R i_C$.

Náboj na kapacitore $Q_C = C u_C$, a teda pre prúd máme $i_C = -dQ_C/dt = -C \frac{du_C}{dt}$.

Po dosadení do rovnice slučky máme rovnicu

$$u_C = -RC \frac{du_C}{dt}. \quad (3)$$

Pre krátky čas vybíjania, tzn. malé zmeny napätia, platí približný vzťah $\frac{du_C}{dt} \approx \frac{\Delta u_C}{\Delta t} = \frac{u_C - u_0}{t}$.

Rovnica (3) tak dostáva tvar $\frac{u_C - u_0}{t} = -\frac{u_C}{RC}$, resp. $u_C = \frac{u_0}{1 + \frac{t}{RC}}$.

Pre $\frac{t}{RC} \ll 1$ použijeme približný vzťah $(1+x)^{-1} \approx 1 - x$, a teda dostávame lineárnu funkciu

$$u_C(t) \approx u_0 \left(1 - \frac{t}{RC}\right). \quad (4)$$

Smernica funkcie $k_{RL} = -\frac{u_0}{RC}$ a časová konštanta R-C obvodu $\tau_{RC} = RC$.

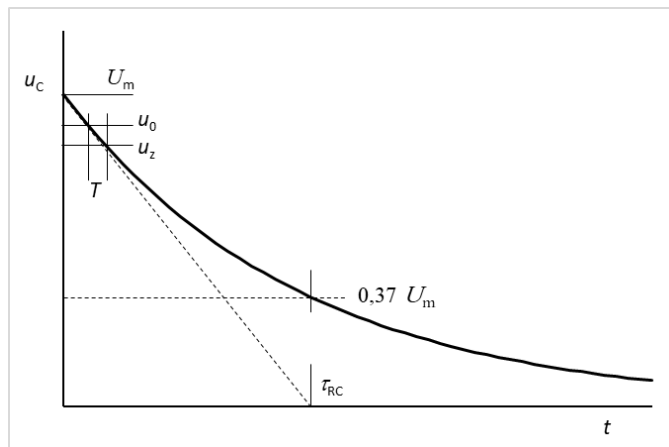
Pre čas $t = \tau_{RC}$ dosiahne napätie podľa lineárnej závislosti hodnotu $u_\tau = 0$, tzn. za čas τ_{RC} by napätie pokleslo na nulovú hodnotu (kapacitor by sa celkom vybil).

Na dosiahnutie veľkej hodnoty časovej konštanty je potrebná pri danej hodnote odporu R rezistora dostatočne vysoká hodnota kapacity C kapacitora.

Pozn.: Riešením diferenciálnej rovnice (3) môžeme odvodiť vzťah pre napätie kapacitora ako

funkciu času $u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$.

V skutočnosti napätie poklesne za čas τ_{RC} približne na hodnotu $0,37 U_0$.



Obr. RA-4

Pozn.: Úspešné riešenie diferenciálnej rovnice v prípadoch a) a b) hodnotiť plným počtom bodov.

a) 1b + 1b za obr. RA-3, b) 1b + 1b za obr. RA-4.

- c) Energia E_L magnetického poľa induktora a E_C elektrického poľa kapacitora je vyjadrená vzťahmi

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2 \quad \text{a} \quad E_C = \frac{1}{2} C u^2.$$

Po dosadení prúdu a napätia ako funkcií času t máme

$$E_L = \frac{1}{2} \frac{U_v^2}{L} t^2 \quad \text{a} \quad E_C = \frac{1}{2} C u_0^2 \left(1 - \frac{t}{RC}\right)^2.$$

Keďže induktor a kapacitor sú akumulátormi energie, nemôže sa energia meniť skokom. Energia sa premieňa na inú formu postupne, tzn. spojite. Energia je funkciou prúdu induktora a napätia kapacitora, preto ani tieto veličiny sa nemôžu meniť skokom, ale menia sa spojite s časom.

1 b

- d) Ak je spínač zapnutý, je dióda v závernom smere (napätie na anóde nulové a na katóde kladné). Vo výstupnom obvode sa prúdom cez záťaž kapacitor vybíja a napätie u_2 klesá. V obvode zdroja cez zapnutý spínač narastá prúd induktora, pričom veľkosť prúdu sa dá regulovať časom zapnutia spínača. Po vypnutí spínača prúd induktora spojite pokračuje jedinou možnou cestou cez diódu, čím sa do výstupného obvodu dodá potrebný náboj na obnovenie začiatočného napätia na kapacitore. Potom sa opäť spínač uzatvorí a dej sa opakuje. Čím väčšie je výstupné napätie, tým väčší pokles náboja nastane, a tým väčší náboj treba pomocou induktora dodať. Takto je možné malým vstupným napätím zdroja ovládať veľké napätie na výstupe.

V ustálenom stave obvodu sa menia napätie a prúd pravidelne, tzn. ak je zapínanie a rozpínanie spínača periodické s periódou T , sú aj zmeny prúdu cievky a napätia kapacitora periodické s rovnakou periódou T . V okamihu zapnutia spínača je začiatočný prúd induktora vždy i_0 a napätie kapacitora u_0 . V okamihu vypnutia spínača je prúd induktora i_z a napätie kapacitora u_z a počas vypnutia spínača sa hodnoty vrátia na začiatočné i_0, u_0 . Dej sa potom opakuje.

Keďže časy zapnutia a vypnutia spínača sú veľmi krátke, prúd $i_z \ll I_m$ a $u_0 - u_z \ll u_0$, môžeme zmeny považovať s dostatočnou presnosťou za lineárne.

2 b

Pri riešení vychádzame z dvoch zákonov zachovania: zákon zachovania náboja a zákon zachovania energie.

Keďže sú zmeny lineárne, určíme strednú hodnotu prúdu diódou v čase t_v jej otvorenia $I_{s1} = \frac{1}{2}(i_0 + i_z)$ a dodaný náboj do výstupného obvodu $Q_1 = I_{s1} t_v$. Stredná hodnota prúdu záťaže $I_{s2} = \frac{1}{2} \frac{u_0 + u_z}{R}$ a náboj, ktorý prejde záťažou za čas celej periódy $Q_2 = I_{s2} T$. Celková zmena náboja kapacitora za čas jednej periódy je nulová, lebo kapacitor sa nabije na začiatočnú hodnotu. Z rovnosti $Q_1 = Q_2$ máme $\frac{i_0 + i_z}{2} t_v = \frac{u_0 + u_z}{2R} T = \frac{U_2}{R} T$. (5)

Ak predpokladáme, že vnútorný odpor zdroja je veľmi malý, považujeme vstupné napätie $u_1 \approx U_v$ za konštantné, a stredný výkon dodávaný zdrojom $P_1 = U_v I_1$. Tento výkon sa rovná strednému príkonu záťaže. Ak je zvlnenie výstupných veličín veľmi malé ($p_2 \ll 1$), môžeme výkon určiť ako súčin stredných hodnôt napätia a prúdu $P_2 = U_2 I_2 = \frac{1}{R} U_2^2$. Z rovnosti stredných výkonov máme

$$U_v \frac{i_0 + i_z}{2} = \frac{1}{R} \left(\frac{u_0 + u_z}{2} \right)^2 = \frac{U_2^2}{R}.$$

Z oboch rovníc potom dostávame

$$\frac{t_v}{T} = \frac{U_v}{U_2}, \text{ resp. } \frac{t_z}{T} = 1 - \frac{t_v}{T} = 1 - \frac{U_v}{U_2}. \text{ Pre dané hodnoty } t_z/T \approx 0,75. \quad 1 \text{ b}$$

Ak požadujeme zvlnenie prúdu zdroja $p_1 = \frac{\Delta i_1}{I_1} = 2 \frac{i_0 - i_z}{i_0 + i_z}$, vyjadríme zmenu prúdu podľa (2)

a strednú hodnotu prúdu podľa (5)

$$i_z - i_0 = \frac{U_v}{L} t_z \text{ a } \frac{i_0 + i_z}{2} = \frac{U_2}{R} \frac{T}{t_v}, \text{ odkiaľ máme}$$

$$p_1 = \frac{U_v}{U_2} \frac{R}{L} \frac{t_z t_v}{T} = \frac{U_v}{U_2} \frac{R}{L} \left(1 - \frac{t_v}{T} \right) \frac{t_v}{T} T = \left(\frac{U_v}{U_2} \right)^2 \left(1 - \frac{U_v}{U_2} \right) \frac{R}{L} T.$$

Odtiaľ určíme indukčnosť induktora

$$L = \left(\frac{U_v}{U_2} \right)^2 \left(1 - \frac{U_v}{U_2} \right) \frac{R}{p_1} T. \text{ Pre dané hodnoty } L \approx 0,94 \text{ H.} \quad 1 \text{ b}$$

Z požiadavky maximálneho zvlnenia výstupného napätia $p_2 = \Delta u / U_2$ s použitím (4) máme

$$p_2 = 2 \frac{u_0 - u_z}{u_0 + u_z} = \frac{u_0 - u_z}{U_2}. \text{ Rozdiel napätí určíme pomocou funkcie (4) } u_0 - u_z \approx u_0 \frac{t_z}{RC}.$$

Z požiadaviek $U_2 = \frac{u_0 + u_z}{2}$ a $p_2 = \frac{u_0 - u_z}{U_2}$ určíme: $u_0 = \frac{p_2 + 2}{2} U_2 \approx U_2$ po vylúčení u_z .

$$\text{Kapacita } C \approx \frac{1}{p_2 R} t_z = \frac{1}{p_2 R} \left(1 - \frac{t_v}{T} \right) T = \frac{1}{p_2 R} \left(1 - \frac{U_v}{U_2} \right) T.$$

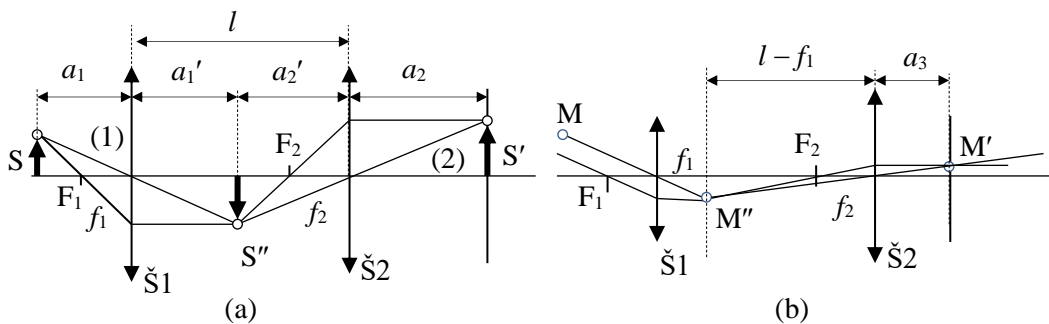
Pre dané hodnoty $C \approx 75 \mu\text{F}$.

1 b

4. Optická sústava

Riešenie:

- a) Do obrázku RA-5 nakreslíme šošovky so vzájomnou vzdialenosťou l , sviečku S do vzdialenosti a_1 pred prvú šošovku $\check{S}1$ a obraz S' sviečky do vzdialenosti a_2 za šošovku $\check{S}2$. Veľkosti y_1 sviečky a y_2 obrazu zvolíme v návrhu ľubovoľne (približne rovnaké). Z vrcholu sviečky S vedieme priamku stredom šošovky $\check{S}1$ a z vrcholu obrazu sviečky S' priamku stredom šošovky $\check{S}2$. Na priesečníku sa nachádza vrchol obrazu S'' vytvoreného šošovkou $\check{S}1$, ktorý je zároveň predmetom šošovky $\check{S}2$. Potom už určíme priamky prechádzajúce ohniskami šošoviek.



Obr. RA-5

Keď máme z prvého obrázku (a) určené ohniská F_1, F_2 , jednoducho zostrojíme prechod zväzku dopadajúcich rovnobežných lúčov od ďalekého objektu sústavou a nájdeme obraz M' Mesiaca M , obr. RA-5 (b). 1b + 1 b

- b) Z druhého obrázku (b) vidíme, že reálny obraz M'' Mesiaca vzniká v obrazovej vzdialenosti f_1 prvej šošovky. Predmetová vzdialenosť šošovky $\check{S}2$ je $l - f_1$ a platí zobrazovacia rovnica šošovky $\check{S}2$

$$\frac{1}{l - f_1} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{f_2} \quad (1)$$

Pre zobrazenie blízkeho predmetu šošovkou $\check{S}1$, podľa obr. RA-5 (a), máme

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1'} = \frac{1}{f_1} \quad (2)$$

a pre zobrazenie šošovkou $\check{S}2$

$$\frac{1}{l - a_1'} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f_2} \quad (3)$$

Z rovníc (1) až (3) vyjadríme kvadratickú rovnicu pre f_1

$$\left(l + a_1 - \frac{a_3 a_2}{a_2 - a_3} \right) f_1^2 - (2a_1 + l) l f_1 + l^2 a_1 = 0,$$

ktorá má riešenie

$$f_1 = \frac{(2a_1 + l) \pm \sqrt{(2a_1 + l)^2 - 4a_1 \left(l + a_1 - \frac{a_3 a_2}{a_2 - a_3} \right)}}{2 \left(l + a_1 - \frac{a_3 a_2}{a_2 - a_3} \right)} l. \quad (4)$$

Ohniskovú vzdialenosť f_2 určíme z rovnice (1)

$$f_2 = \frac{a_3(l - f_1)}{a_3 + l - f_1}. \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty veličín $f_1 \approx 5,41 \text{ cm}$, $f_2 \approx 6,88 \text{ cm}$ – pre znamienko (-) vo výsledku (4).

Pre znamienko (+) $f_1 \approx -54,79 \text{ cm}$, $f_2 \approx 11,07 \text{ cm}$, tzn. prvá šošovka je rozptylka, čo nevyhovuje zadaniu. 1 b

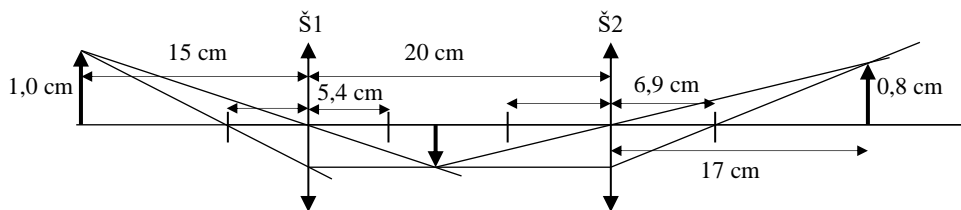
- c) Označíme y_1 výšku sviečky, y_2 výšku obrazu S' sviečky a výšku y_3 obrazu S'' . Z obr. RA-5 (a) vyplývajú vzťahy

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{a_1}{a_1'} \quad \text{a} \quad \frac{y_3}{y_2} = \frac{l - a_1'}{a_2} \quad \text{a z nich} \quad z_1 = \frac{y_2}{y_1} = \frac{a_1'}{l - a_1'} \frac{a_2}{a_1},$$

kde podľa (2) $a_1' = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}$, a teda

$$z_1 = \frac{a_2 f_1}{l(a_1 - f_1) - a_1 f_1}. \quad 1 \text{ b}$$

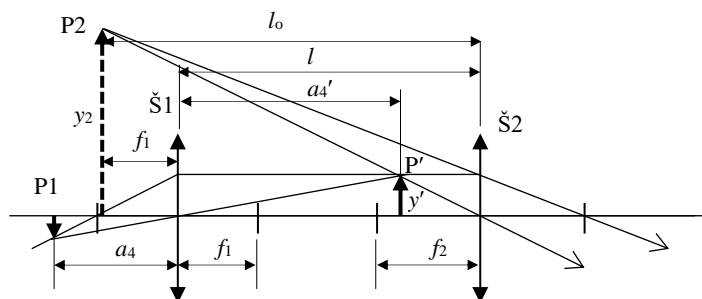
Pre dané a vypočítané hodnoty $z_1 \approx 0,83$. Dochádza teda k zmenšeniu.



Obr. RA-6

Presnou konštrukciou overíme graficky výsledok $z_1 \approx 0,8$, obr. RA-6. 1 b

- d) Ak má oko vytvoriť na sietnici reálny obraz, musí byť predmet pred šošovkou oka, tzn. naľavo od šošovky Š2, a teda ide o virtuálny obraz vo vzdialenosti l_o . Chod lúčov znázorňuje obr. RA-7.



Obr. RA-7

1 b

Nakreslíme virtuálny obraz P2 šošovky Š2. K nemu zostrojíme predmet P', ktorý je súčasne obrazom šošovky Š1. Zostrojíme predmet P1 šošovky Š1 vo vzdialenosti a_4 pred šošovkou. Pre zobrazenie šošovkou Š1 máme rovnicu

$$\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a'_4} = \frac{1}{f_1} . \quad (5)$$

Pre zobrazenie šošovkou Š2 máme

$$\frac{1}{l - a'_4} - \frac{1}{l_o} = \frac{1}{f_2} . \quad (6)$$

Po vylúčení a'_4 dostávame

$$a_4 = f_1 \frac{l(f_2 + l_o) - l_o f_2}{(l - f_1)(f_2 + l_o) - l_o f_2} .$$

Pre dané a vypočítané hodnoty $a_4 \approx 85,9$ mm.

1 b

e) Ak je výška predmetu y_1 a výška virtuálneho obrazu y_2 , platí

$$\frac{y_1}{y'} = \frac{a_4}{a'_4} \quad \text{a} \quad \frac{y'}{y_2} = \frac{l - a'_4}{l_o} , \text{ odkiaľ máme } \frac{y_2}{y_1} = \frac{l_o}{a_4} \frac{a'_4}{l - a'_4} .$$

S použitím (5) a (6) dostávame

$$z_2 = \frac{y_2}{y_1} = \frac{l_o + f_2}{a_4 - f_1} \frac{f_1}{f_2} .$$

Pre dané a vypočítané hodnoty $z_2 \approx 7,88$.

1 b

Rúra s šošovkami predstavuje jednoduchý mikroskop.

Zväčšenie získané graficky, obr. RA-5, je približne $z_2 \approx 8$, súhlasí s výsledkom výpočtu.

1 b

5. Reálny rezistor

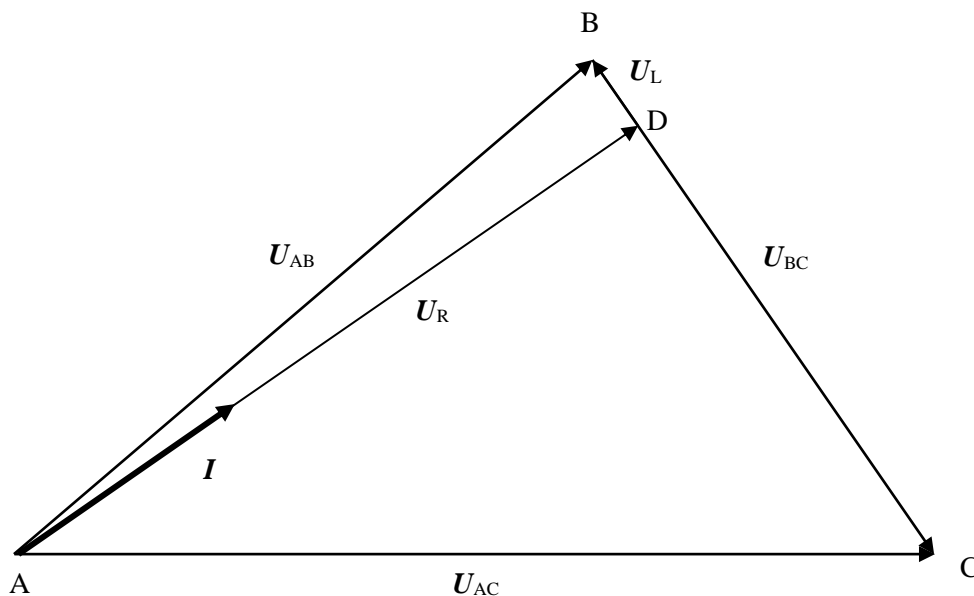
Riešenie:

a) Fázorový diagram, obr. RA–8.

3 b

Zostrojíme trojuholník zadaný hodnotami U_{AC} , U_{AB} a U_{BC} . Podľa potreby rozmery zväčšíme, aby sme mohli z obrázku určiť jednotlivé napätia. Napätie U_{AB} je vektorovým súčtom fázorov napätí U_R a U_L , ktoré sú navzájom kolmé. Smer fázora U_R a smer fázora prúdu I sú zhodné.

Keďže celou sústavou prechádza rovnaký prúd I , je fázor U_C kolmý na fázor I . Z vrcholu A teda zostrojíme kolmicu na U_{BC} do bodu D a príslušná výška AD trojuholníka zobrazuje fázor U_R reálnej zložky napätia rezistora. Induktívna zložka je znázornená fázorom U_L medzi bodmi DB.



Obr. RA–8

b) Fázor prúdu zdroja

$$I = j\omega C U_{BC} . \quad (1)$$

Fázory meraných napätí sú

$$U_{AB} = I (R + j\omega L) = j\omega C (R + j\omega L) U_{BC} , \quad (2)$$

$$U_{AC} = I \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = [j\omega C (R + j\omega L) + 1] U_{BC} . \quad (3)$$

Z rovnosti veľkosti fázorov, ako sú vyjadrené vo vzťahoch (2) a (3), po úprave máme

$$\frac{1}{(\omega C)^2} \left(\frac{U_{AB}}{U_{BC}} \right)^2 = R^2 + (\omega L)^2 , \quad (4)$$

$$\frac{U_{AC}}{U_{BC}} = (1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega C)^2 R^2 . \quad (5)$$

Ide o dve rovnice pre dve neznáme veličiny L , R , ktoré z nich vyjadríme

$$L = \frac{1}{2\omega^2 C} \left[1 - \left(\frac{U_{AC}}{U_{BC}} \right)^2 + \left(\frac{U_{AB}}{U_{BC}} \right)^2 \right] \quad (6) \quad 1 \text{ b}$$

$$R = \frac{1}{(\omega C)} \sqrt{\left(\frac{U_{AB}}{U_{BC}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{U_{AC}}{U_{BC}} \right)^2 + \left(\frac{U_{AB}}{U_{BC}} \right)^2 \right]^2} \quad (7) \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $L \approx 16,0 \mu\text{H}$, $R \approx 100 \Omega$ a faktor kvality $Q = \tan \delta = R / \omega L \approx 9,95$. 1 b

- c) Prúd v obvode môžeme určiť napr. pomocou napätia na kapacitore (1).

Efektívna hodnota prúdu

$$I = \omega C U_{BC} \quad (8) \quad 1 \text{ b}$$

Fázový rozdiel napätia zdroja U_{AC} voči prúdu I je rovný argumentu impedancie

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Možno ho jednoducho určiť z úvahy o činnom výkone – výkon zdroja je rovný príkonu rezistora

$$P = U I \cos \varphi = R I^2, \text{ odkiaľ máme} \quad (9)$$

$$\cos \varphi = R \omega C \frac{U_{BC}}{U_{AC}} = \frac{U_{BC}}{U_{AC}} \sqrt{\left(\frac{U_{AB}}{U_{BC}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{U_{AC}}{U_{BC}} \right)^2 + \left(\frac{U_{AB}}{U_{BC}} \right)^2 \right]^2} \quad (10)$$

Pre dané a vypočítané hodnoty $I \approx 49,2 \text{ mA}$, $\varphi \approx -34,9^\circ$ (znamienko vyplýva z fyzikálnej podstaty – pozri fázorový diagram). 1 b

- d) Pomer napätí

$$\frac{U_R}{U_{AC}} = \frac{R I}{U_{AC}} = \frac{U_{BC}}{U_{AC}} \sqrt{\left(\frac{U_{AB}}{U_{BC}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{U_{AC}}{U_{BC}} \right)^2 + \left(\frac{U_{AB}}{U_{BC}} \right)^2 \right]^2} \approx 0,821, \quad 0,5 \text{ b}$$

$$\frac{U_L}{U_{AC}} = \frac{\omega L}{U_{AC}} I = \frac{U_{BC}}{2U_{AC}} \left[1 - \left(\frac{U_{AC}}{U_{BC}} \right)^2 + \left(\frac{U_{AB}}{U_{BC}} \right)^2 \right] \approx 0,0824. \quad 0,5 \text{ b}$$

Odčítaním z fázorového diagramu dostávame rovnaké pomery.

- e) Činný výkon zdroja možno určiť dvomi spôsobmi podľa (9)

$$P = U_{AC} I \cos \varphi = \omega C U_{BC}^2 \sqrt{\left(\frac{U_{AB}}{U_{BC}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{U_{AC}}{U_{BC}} \right)^2 + \left(\frac{U_{AB}}{U_{BC}} \right)^2 \right]^2}.$$

Pre dané hodnoty $P \approx 0,242 \text{ W}$. 1 b

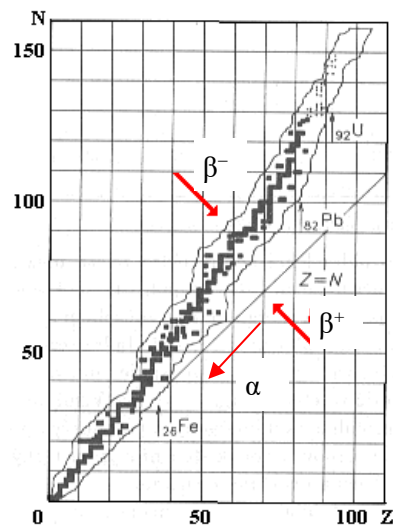
Pozn.: Druhá možnosť $P = R I^2$ s rovnakým výsledkom.

6. Plutóniový zdroj energie LK

Riešenie:

- a) Nukleóny sa navzájom priťahujú, pričom silná jadrová interakcia pôsobí iba na veľmi krátku vzdialenosť rovnú približne priemeru nukleónu. Protóny v jadre sa navzájom odpudzujú elektrickou silou s relatívne ďalekým dosahom. Malé jadrá majú rovnaký počet protónov a neutrónov, napr. ${}^4_2\text{He}$, ${}^4_2\text{He}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{14}_7\text{N}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{20}_{10}\text{Ne}$, ${}^{28}_{14}\text{Si}$, ...

Veľké jadrá majú počet neutrónov N väčší ako počet protónov Z . Neutróny sú dôležité pre zníženie elektrických odpudivých síl. Najväčšie stabilné jadrá sú olovo ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ a bizmut ${}^{209}_{83}\text{Bi}$. U väčších jadier už ani vyšší počet neutrónov nemôže zabezpečiť ich stabilitu a dochádza k ich samovoľnej premene na menšie jadrá až po Pb alebo Bi. Existuje optimálna krivka, obr. RA-9, pozdĺž ktorej sa nachádzajú stabilné jadrá (tmavý štvorček) a izotopy s najčastejším



Obr. RA-9

výskytom. Najväčšie jadrá, ktoré sa v prírode vo väčšej miere vyskytujú, sú jadrá uránu ${}^{238}_{92}\text{U}$ s polčasom premeny 4,47 mld rokov a je pozostatkom výbuchu supernovy, ktorá poskytla materiál na vytvorenie Slnecnej sústavy. Vyššie jadrá s krátkymi polčasmi premeny sa už dávno premenili na menšie jadrá a dnes sa vyskytujú iba ako umelo vyrobené. V súčasnosti najväčšie jadro má prvok oganesón ${}^{294}_{118}\text{Og}$ objavený v roku 2006. 2 b

- b) Jadrá ďaleko od optimálnej krivky sú veľmi nestabilné a dochádza k ich premene smerom bližšie k optimálnej krivke, pričom hmotnosť jadra sa nezväčšuje.

Pri prebytku neutrónov je najčastejší proces β^- -premena, pri ktorej dochádza k premene neutrónu na protón, elektrón a antineutrino ${}_0^1n \rightarrow {}_1^1p + {}_{-1}^0e + \nu_e$, pričom uvoľnené elektróny predstavujú β^- -žiarenie. Rovnica β^- premeny je ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AY + {}_{-1}^0e + \nu_e$, v obr. RA-9 označená šípkou s β^- , napr. ${}^{14}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + \beta^-$, ${}^{32}_{15}\text{P} \rightarrow {}^{32}_{16}\text{S} + \beta^-$.

Pri prebytku protónov je najčastejšia α -premena, pri ktorej sa z jadra uvoľní ${}^4_2\alpha$ -častica (jadro atómu hélia ${}^4_2\text{He}$), podľa rovnice ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}^4_2\alpha$. Uplatňuje sa najmä pri premene ťažkých jadier s nukleónovým číslom $A > 200$, napr. ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^4_2\alpha$ alebo ${}^{238}_{94}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{92}\text{U} + {}^4_2\alpha$ a pod., pritom dochádza k výraznému poklesu hmotnosti jadra a úprave pomeru N/Z . Premena je označená šípkou s označením α v obr. RA-9.

U ľahších jadier s prebytkom protónov sa uplatňuje β^+ -premena, pri ktorej dochádza k premene protónu ${}_1^1p \rightarrow {}_0^1n + {}_1^0\tilde{e} + \nu_e$ a z jadra sa uvoľňuje pozitron (anti-elektrón) a neutrino, napr. ${}^{11}_6\text{C} \rightarrow {}^{11}_5\text{B} + \beta^+$, ${}^{40}_{19}\text{K} \rightarrow {}^{40}_{18}\text{Ar} + \beta^+$, ${}^{18}_9\text{F} \rightarrow {}^{18}_8\text{O} + \beta^+$ a pod., v obr. RA-9 označená šípkou s β^+ .

Ďalšou reakciou v atómoch s prebytkom protónov v jadre je K-záchyt, tzn. záchyt elektrónu z najnižšej K-hladiny elektrónového obalu do jadra a premene protónu na neutrón ${}^1_1\text{p} + {}^0_{-1}\text{e} \rightarrow {}^1_0\text{n} + \nu_e$. Rovnica premeny ${}^A_Z\text{X} + {}^0_{-1}\text{e} \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{Y} + \nu_e + \gamma$, kde γ je fotón uvoľnený pri prechode elektrónu v elektrónovom obale pri prechode z vyššej hladiny do uvoľneného miesta na K hladine. Príklady premeny ${}^{65}_{30}\text{Zn} + {}^0_{-1}\text{e} \rightarrow {}^{65}_{29}\text{Cu}$, ${}^{109}_{48}\text{Cd} + {}^0_{-1}\text{e} \rightarrow {}^{109}_{47}\text{Ag}$ a pod. 2 b

- c) Pri syntéze jadra z pôvodne voľných častíc (protónov a neutrónov) sa uvoľní energia väzby E_v .

Väzbová energia sa prejaví úbytkom hmotnosti $\Delta m = \frac{E_v}{c^2}$. V literatúre vyhľadáme hmotnosti protónu $m_p = 1,007\,825\,032\,u$, neutrónu $m_n = 1,008\,664\,915\,u$, $m_{\text{Pu}238} = 238,049\,553\,u$, atómová hmotnostná jednotka $u = 1,660\,538\,782 \times 10^{-27}\text{ kg}$, rýchlosť svetla vo vákuu $c = 299\,792\,458\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $1\text{ eV} = 1,602\,176\,53 \times 10^{-19}\text{ J}$.

Hmotnostný úbytok jadra $\Delta m = N m_n + Z m_p - m(Z, N)$. Pre $Z = 94$, $N = 144$ a uvedené hodnoty hmotností máme $\Delta m \approx 3,211\,063 \times 10^{-27}\text{ kg}$. 0,5 b

$$1 \frac{\text{GeV}}{c^2} = \frac{10^9 \times 1,60217653 \times 10^{-19}}{299792458^2} \text{ kg} = 1,782662 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Hmotnostný úbytok pre uvedené jadro ${}^{238}_{94}\text{Pu}$ je $\Delta m \approx 1,801\,274\text{ GeV}/c^2$. 0,5 b

Väzbová energia na jeden nukleón $E_{v1} = E_v/A = 7,568\,379\text{ MeV}$, čo je typická hodnota pre veľké jadrá $A > 200$. 1 b

- d) Rovnica α -premeny plutónia ${}^{238}_{94}\text{Pu} \rightarrow {}^{234}_{92}\text{U} + {}^4_2\text{He}$. 0,5 b

Reakcia nastane, ak sa reakciou zníži väzbová energia častíc. Rozdiel energie sa prejaví ako kinetická energia produktov.

Z literatúry (internetu) určíme úbytok hmotnosti Δm pre ${}^{238}_{94}\text{Pu}$ ($46,164745\text{ MeV}/c^2$), ${}^{234}_{92}\text{U}$ ($38,146625\text{ MeV}/c^2$), ${}^4_2\text{He}$ ($2,42491565\text{ MeV}/c^2$).

Pri premene sa uvoľní kinetická energia

$$E_k = (46,164745 - 38,146625 - 2,42491565)\text{ MeV} \approx 5,593204\text{ MeV}. \quad 1\text{ b}$$

Táto energia sa rozdelí medzi produkty reakcie. Podľa zákona zachovania hybnosti sú hybnosti p oboch produktov rovnaké

$$E_k = \frac{p^2}{2m_U} + \frac{p^2}{2m_{\text{He}}}, \text{ odkiaľ } p^2 = \frac{2m_U m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_U} E_k,$$

$$\text{a teda } E_{k\alpha} = \frac{p^2}{2m_{\text{He}}} = \frac{m_U}{m_{\text{He}} + m_U} E_k, \text{ pre dané hodnoty } E_{k\alpha} = 5,50\text{ MeV}.$$

Pre reakciu ${}^{238}_{94}\text{Pu} \rightarrow {}^{236}_{93}\text{Np} + {}^2_1\text{D}$ zistíme $m_{\text{Np}236} = 236,046\,570\text{ u}$ a $m_{\text{D}} = 2,013\,553\,213\text{ u}$.

Pri reakcii uvoľnená energia $E_k = (238,049\,553 - 236,046\,570 - 2,013\,553)\text{ u} = -0,01057\text{ u} < 0$, tzn. reakcia nenastane. 0,5 b

- e) Podľa exponenciálneho zákona premeny

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T}\right), \text{ resp. } -\frac{dn}{dt} = \frac{\ln 2}{T} n_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T} t\right).$$

$$\text{Uvoľnený výkon } P = E_k \left(-\frac{dn}{dt} \right) = E_k \frac{\ln 2}{T} n(t).$$

Na začiatku je v palivovom článku $N_A = 6,022\,141 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ atómov a výkon článku

$$P_0 = E_k N_A \frac{\ln 2}{T}, \text{ pre dané hodnoty } P_0 \approx 135 \text{ W.} \quad 1 \text{ b}$$

f) Výkon poklesne v pomere p za čas

$$p = \frac{P}{P_0} = \frac{n(t)}{n_0} = \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T}\right), \text{ odkiaľ } t_1 = -\frac{T}{\ln 2} \ln p_1.$$

Pre $p_1 = 0,1$ máme $t_1 \approx 292$ rokov. 1 b

7. Teplotné vyžarovanie telies – experimentálna úloha IC

Poznámky k riešeniu:

Odporúča sa merať pre najmenej 20 hodnôt napätia zdroja.

k bodu b): jednosmerný odpor sa určí ako pomer U/I . Hodnota pri izbovej teplote môže byť až $5\times$ nižšia ako pri prevádzkových teplotách vlákna žiarovky.

Pri určovaní teploty vychádzame zo vzťahu $R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$, T je termodynamická teplota v jednotkách 1 K.

$$\text{Odtiaľ } T = T_0 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right), \text{ pričom } \{t\} = \{T\} - 273,15.$$

k bodu c) približne od teploty, kedy začína vlákno svietiť (tmavá červená farba) je už pomer $\frac{P}{T^4}$ konštantný, tzn. odvod tepla žiarením je dominantný.

Pre nižšie teploty pomer $\frac{P}{T^4}$ klesá až po nulovú hodnotu pri $T = T_0$.

Súvisí to s dvomi javmi – jednak pri nižších teplotách výrazne klesá vyžiarený výkon $\sim (T^4 - T_0^4)$ a presadzuje sa odvod tepla prívodmi (odvod tepla do okolia vedením sa neuplatní vo vákuovej žiarovke), druhý jav súvisí s žiarením okolia s výkonom $P_0 = S \sigma T_0^4$. Výsledná bilancia prenosu výkonu žiarením je $\sim \sigma (T^4 - T_0^4)$, čoho vyplýva pokles pomeru $\frac{P}{T^4}$ až k nule pri $T = T_0$.

60. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie A

Autori návrhov úloh:	Eubomír Konrád 1, 6, Dušan Nemeč 3, Ivo Čáp 2, 4, 5, 7
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Klivanec, Eubomír Mucha
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018