

60. ročník Fyzikálnej olympiády
 v školskom roku 2018/2019
 kategória B – domáce kolo
 Riešenie úloh

1. Kmity zat'azenej obruče

Riešenie:

a) Zavesená obruč je znázornená na obr. RB–1.

Na sústavu pôsobia tiažové sily F_1 obruče, F_2 telieska a reakcia F_3 v bode závesu. V rovnováhe pre veľkosti síl platí $F_3 = F_1 + F_2$.

Rovnovážna poloha je daná podmienkou momentovej rovnováhy. Rovnica rovnováhy vzhľadom na bod A je

$$F_2 y = F_1 x, \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

kde $F_1 = M g$, $F_2 = m g$, 1 b

$$x = r \sin \varphi \quad \text{a} \quad y = r \sin(\alpha - \varphi) - r \sin \varphi. \quad 1 \text{ b}$$

Po dosadení do (1) dostávame rovnicu

$$m g [r \sin(\alpha - \varphi) - r \sin \varphi] = M g r \sin \varphi, \quad (2)$$

a po úprave

$$\tan \varphi = \frac{m}{M} \frac{\sin \alpha}{1 + \frac{m}{M}(1 + \cos \alpha)}.$$

Pre dané hodnoty $\tan \varphi \approx 0,11$, tzn. $\varphi \approx 6,5^\circ$. 2 b

b) Pri vychýlení sústavy o uhol γ z rovnováhy sa zmení uhol φ na uhol $\varphi + \gamma$. Pohybová rovnica kmitov sústavy vzhľadom na vodorovnú os prechádzajúcu bodom A je

$$I \varepsilon = -M g r \sin(\varphi + \gamma) + m g r [\sin(\alpha - \varphi - \gamma) - \sin(\varphi + \gamma)]. \quad (3) \quad 2 \text{ b}$$

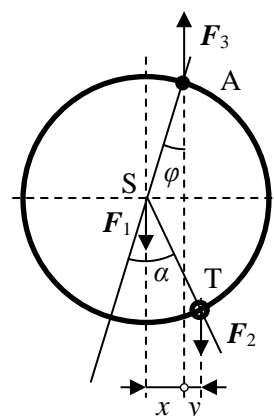
Moment zotrvačnosti vzhľadom na os A určíme ako súčet momentu zotrvačnosti I_1 obruče a momentu zotrvačnosti I_2 telieska. Pri určení I_1 použijeme Steinerovu vetu.

$$\begin{aligned} I &= (M r^2 + M r^2) + m (AT)^2 = 2M r^2 + m [(r \sin \alpha)^2 + (r + r \cos \alpha)^2] = \\ &= 2M r^2 \left[1 + \frac{m}{M} (1 + \cos \alpha) \right]. \end{aligned}$$

Rovnicu upravíme pre $\gamma \ll 1$ rad, tzn. $\cos \gamma \approx 1$, $\sin \gamma \approx \gamma$, a použijeme (2)

$$\begin{aligned} I \varepsilon &= -M g r (\sin \varphi + \gamma \cos \varphi) + m g r [\sin(\alpha - \varphi) - \gamma \cos(\alpha - \varphi) - \sin \varphi - \gamma \cos \varphi] \\ &= -M g r \sin \varphi + m g r [\sin(\alpha - \varphi) - \sin \varphi] - \{M g r \cos \varphi + m g r [\cos(\alpha - \varphi) + \cos \varphi]\} \gamma = \\ &= -g r [(M + m) \cos \varphi + m \cos(\alpha - \varphi)] \gamma = -k \gamma. \end{aligned}$$

Keďže pre malé výchylky je vratný moment sily priamoúmerný uhlu vychýlenia, ide o rovnicu harmonických kmitov s periódou



Obr. RB–1

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{g} \frac{1 + \frac{m}{M}(1 + \cos \alpha)}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \cos \varphi + \frac{m}{M} \cos(\alpha - \varphi)}}.$$

Pre dané hodnoty $T \approx 1,10$ s.

3 b

2. Regulátor hladiny transformátorového oleja

Riešenie:

- a) Snímač je doskový kondenzátor, ktorý možno považovať za dva paralelné kondenzátory s rôznymi dielektrikami (vzduchová časť a olejová časť)

$$C = \varepsilon_0 \frac{a}{d} \left(\frac{b}{2} + x \right) + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{a}{d} \left(\frac{b}{2} - x \right) = \varepsilon_0 \frac{a}{d} \left[\frac{b}{2} (1 + \varepsilon_r) - x (\varepsilon_r - 1) \right] = C_0 - C' \frac{x}{b},$$

kde $C_0 = \varepsilon_0 (\varepsilon_r + 1) \frac{ab}{2d}$ je kapacita snímača pri normálnej výške hladiny oleja ($x = 0$)

a konštanta úmernosti $C' = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{ab}{d}$.

Pre dané hodnoty veličín $C_0 \approx 69$ pF.

1 b

- b) Rezonančná frekvencia je daná podmienkou $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C_0}$, odkiaľ

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C_0} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_0}.$$

Faktor kvality je daný pomerom amplitúd U_{L0} napätia na induktore a amplitúdy U_0 napätia zdroja v stave rezonancie $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 R C_0}$, odkiaľ

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C_0 Q}.$$

Pre dané hodnoty $L \approx 0,37$ mH, $R \approx 0,23$ k Ω .

2 b

- c) Obvod snímača je sériový rezonančný obvod. Napätie na rezistore je

$$U_R = R \frac{U_0}{Z} = U_0 \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega R C}\right)^2}}.$$

Vzťah upravíme s použitím daných parametrov rezonančného obvodu

$$\frac{U_R}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}}. \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

Pre rezonančnú frekvenciu f_{01} máme

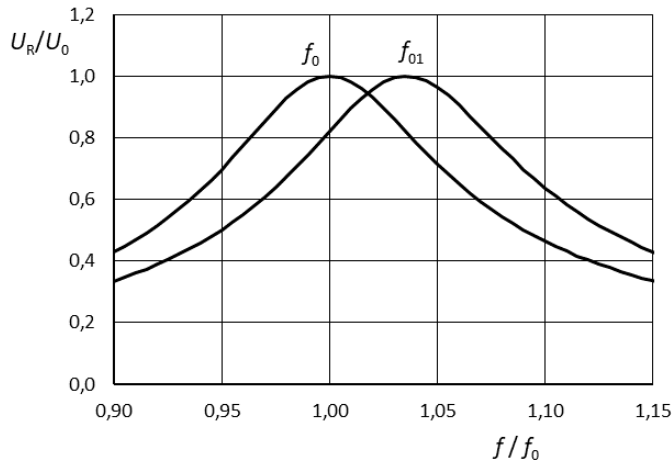
$$\left(\frac{U_R}{U_0}\right)_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_{01}} - \frac{f_{01}}{f}\right)^2}}, \quad (2) \quad 1 \text{ b}$$

$$\text{kde } \frac{f_{01}}{f_0} = \frac{\sqrt{LC_0}}{\sqrt{L\left(C_0 - C' \frac{x}{b}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C'}{C_0} p}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2p \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}}}.$$

Pre veľmi malé $p \ll 1$ možno použiť približná vzťah

$$\frac{f_{01}}{f_0} = \left(1 - 2p \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + p \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}. \quad (3) \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $f_{01} \approx 1,035 f_0 = 1,035 \text{ MHz}$. Grafy U_R/U_0 ako funkcie f/f_0 (funkcie (1) a (2)) sú na obr. RB-2.



Obr. RB-2

1 b

- d) Napätia U_1 sú dané vzťahmi (1), (2), ktoré určujú amplitúdy striedavého napätia na rezistore R .

$$U_{10} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}} U_0, \quad U_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_{01}} - \frac{f_{01}}{f}\right)^2}} U_0.$$

Nastavíme napätie $U_2 = U_{10}$.

Pre dané hodnoty $U_{10} = U_2 \approx 17,2 \text{ V}$, $U_{11} \approx 23,1 \text{ V}$.

0,5 + 0,5 b

- e) Hľadáme posunutie rezonančnej frekvencie, pre ktorú je amplitúda napätia na rezistore

$$U_{R2} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_{02}} - \frac{f_{02}}{f}\right)^2}} U_0, \quad (4)$$

odkiaľ dostávame kvadratickú rovnicu

$$\left(\frac{f_{02}}{f}\right)^2 \pm 2 \frac{1}{2Q} \sqrt{\left(\frac{U_0}{U_{R2}}\right)^2 - 1} \frac{f_{02}}{f} - 1 = 0,$$

ktorá má riešenie

$$\frac{f_{02}}{f} = \pm \frac{1}{2Q} \sqrt{\left(\frac{U_0}{U_{R2}}\right)^2 - 1} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} \left[\left(\frac{U_0}{U_{R2}}\right)^2 - 1\right] + 1}.$$

Vylúčime záporné výsledky a $f_{02} > f$, ktorý nezodpovedá obr. RB-2. Potom máme

$$\frac{f_{02}}{f_0} \frac{f_0}{f} = -\frac{1}{2Q} \sqrt{\left(\frac{U_0}{U_{R2}}\right)^2 - 1} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} \left[\left(\frac{U_0}{U_{R2}}\right)^2 - 1\right] + 1} = \frac{f_0}{f} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 p_2 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}}},$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_r - 1} \left[1 - \left(2Q \frac{f_0}{f} \right)^2 \left(\sqrt{\left(\frac{U_0}{U_{R2}}\right)^2 - 1} + 4Q^2 - \sqrt{\left(\frac{U_0}{U_{R2}}\right)^2 - 1} \right)^{-2} \right],$$

kde $U_{R2} = U_2 + \frac{U_{3s}}{A} \approx 17,27 \text{ V.}$ 1 b

Pre dané hodnoty $p_2 \approx 1,6 \times 10^{-3}$. 1 b

3. Valec na naklonenej rovine

Riešenie:

a) Situačný obrázok RB-3 s vyznačenými silami.

1 b

V dotykovej úsečke pôsobí smerom nahor pozdĺž dosky sila F_T trenia. V zvislom smere pôsobí tiažová sila F_g , ktorá má zložku $F_g \sin \varphi$ rovnobežnú s naklonenou rovinou a zložku $F_g \cos \varphi$ kolmú na naklonenú rovinu. Naklonená rovina pôsobí na valec tlakovou silou F_N kolmou na naklonenú rovinu.

Ak dochádza k relatívnemu pohybu povrchu valca voči doske, valec sa prešmykuje, ide o trenie šmykové dané vzťahom $F_T = f_k F_N$.

Ak sa valec neprešmykuje (valivý pohyb), ide o trenie statické, ktoré je určené iba maximálnou hodnotou $F_T \leq f_s F_N$. 1 b

Pohyb valca možno rozložiť na posuvný pohyb osi valca a otáčavý pohyb okolo osi valca. Pohybové rovnice majú tvar

$$ma = F_g \sin \varphi - F_T, \quad (1)$$

$$I \varepsilon = r F_T, \quad (2)$$

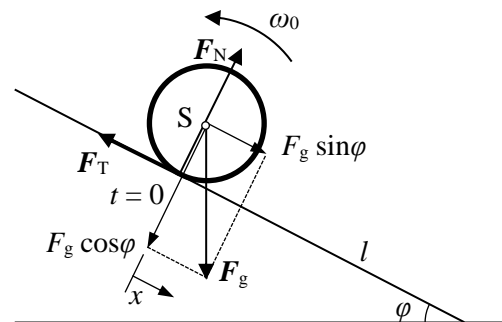
kde a je zrýchlenie posuvného pohybu, ε uhlové zrýchlenie otáčania, m hmotnosť valca, $I = \frac{1}{2} m r^2$ moment zotrvačnosti vzhľadom na os valca. Za kladný smer posuvného pohybu je zvolený smer nadol a otáčavého pohybu v smere otáčania hodinových ručičiek. 1 b

b) Valec sa otáča na začiatku okolo svojej geometrickej osi a ťažisko valca je v pokoji. Valec sa teda na naklonenej rovine prešmykuje, tzn. medzi valcom a naklonenou rovinou pôsobí šmykové trenie $F_T = f_k F_g \cos \varphi$. Moment sily šmykového trenia brzdí otáčanie valca. Otáčavý pohyb valca je rovnomerne spomalený (2). 0,5 b

Podľa (1) zrýchlenie a_k pri prešmykovaní je určené rozdielom síl $F = F_g \sin \varphi - f_k F_g \cos \varphi$. Nulové zrýchlenie je dané podmienkou $F = 0$, odkiaľ máme

$$\varphi = \varphi_k = \arctan f_k. \text{ Pre danú hodnotu } \varphi_k \approx 19^\circ. \quad (3) \quad \text{0,5 b}$$

Pri uhlu φ_k valec zostáva na jednom mieste a otáčavý pohyb sa brzdí s uhlovým zrýchlením



Obr. RB-3

$$\varepsilon_k = \frac{r F_T}{I} = \frac{2 f_k g \cos \varphi_k}{r}, \quad (4)$$

$$\omega = -\omega_0 + \varepsilon_k t.$$

Otáčanie, a teda aj prešmykovanie, sa zastaví ($\omega = 0$) za dobu

$$t_0 = \frac{\omega_0}{\varepsilon_k} = \frac{\omega_0 I}{r m g f_k \cos \varphi_k} = \frac{\omega_0 r}{2 g f_k \cos \varphi_k} = \frac{\omega_0 r}{2 g f_k} \sqrt{1 + f_k^2}. \quad (5)$$

Pre dané hodnoty $t_0 \approx 0,29$ s.

0,5 b

Po zastavení otáčania sa valec začne pohybovať nadol po naklonenej rovine.

Pre hodnoty uhlu $\varphi < \varphi_k$ je $F_g \sin \varphi < F_T$ a valec sa začne pohybovať na naklonenej rovine nahor ($a_k < 0$). Pre hodnoty uhlu $\varphi > \varphi_k$ je $F_g \sin \varphi > F_T$ a valec sa začne na naklonenej rovine šmýkať nadol ($a_k > 0$).

0,5 b

- c) Valivý pohyb sa vyznačuje tým, že valec sa na naklonenej rovine neprešmykuje, a teda trenie je statické. Musia byť teda splnené dve podmienky:

i) valec sa na naklonenej rovine neprešmykuje, tzn. $v = \omega r$ a súčasne $a = \varepsilon r$,

ii) je splnená podmienka pre statické trenie $F_T \leq f_s m g \cos \varphi$.

Pre posuvný a otáčavý pohyb okolo osi valca platia pohybové rovnice (1) a (2).

S použitím podmienky $a = r \varepsilon$ dostávame

$$F_T = \frac{\sin \varphi}{1 + \frac{m r^2}{I}} m g = \frac{1}{3} m g \sin \varphi \leq f_s m g \cos \varphi, \quad (6)$$

odkiaľ máme medzný uhol $\alpha_v = \arg \tan(3 f_s)$. Pre danú hodnotu $\alpha_v \approx 50^\circ$.

0,5 b

Ak nastane stav, kedy platí $v = \omega r$, môže pohyb prejsť na valivý, ak platí $\varphi < \varphi_v$. Ak je $\varphi > \varphi_v$, valivý pohyb nemôže nastať, tzn. valec sa vždy na naklonenej rovine prešmykuje.

Pozn.: Keďže $f_s > f_k$, je $\varphi_v > \varphi_k$.

- d) Môžu nastať prípady:

1) $\varphi > \varphi_v$: Valec sa prešmykuje (šmykové trenie) a od začiatku sa pohybuje nadol s prešmykovaním až k dolnému okraju naklonenej roviny. Valivý pohyb nastať nemôže.

2) $\varphi_k < \varphi \leq \varphi_v$: Valec sa prešmykuje (šmykové trenie), ale od začiatku sa pohybuje nadol po naklonenej rovine. Rýchlosť v z nulovej hodnoty a ω zo zápornej hodnoty $-\omega_0$ rastie. Ak nastane stav $v = \omega r$ pred dosiahnutím dolného okraja naklonenej roviny, pokračuje valec valivým pohybom (statické trenie) k dolnému okraju naklonenej roviny.

3) Rovnako ako 2), len ak dosiahne valec dolný okraj skôr ako nastane stav $v = \omega r$, valec sa po celej dráhe iba prešmykuje (šmykové trenie).

4) $\varphi = \varphi_k$: Valec sa otáča na jednom mieste až do zastavenia otáčania (šmykové trenie), a potom pokračuje nadol valivým pohybom (statické trenie) až k dolnému okraju naklonenej roviny.

5) $\varphi < \varphi_k$: Valec sa prešmykuje (šmykové trenie) a pohybuje sa nahor po naklonenej rovine, pričom veľkosť rýchlosti v posuvného pohybu rastie a veľkosť uhlovej rýchlosti ω klesá. Keď sa dosiahne stav $v = \omega r$, pokračuje valec valivým pohybom (statické trenie) nahor až do zastavenia. Potom pokračuje valivým pohybom (statické trenie) nadol až k dolnému koncu naklonenej roviny.

aspoň 3 prípady 1 b

- e) Ak je $\varphi_1 > \varphi_v$, po položení na naklonenú rovinu sa valec šmýka nadol bez ohľadu na uhlovú rýchlosť otáčania. Zrýchlenie posuvného pohybu je

$$a_{k1} = g (\sin \varphi_1 - f_k \cos \varphi_1) \quad (7)$$

Dráhu valec prekoná za čas

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_{k1}}} = \sqrt{\frac{2l}{g (\sin \varphi_1 - f_k \cos \varphi_1)}} . \text{ Pre dané hodnoty } t_1 \approx 0,54 \text{ s.} \quad 0,5 \text{ b}$$

Ak je uhol $\varphi_2 = \varphi_k$, zostane rotujúci valec na mieste, kým pôsobí sila šmykového trenia medzi rotujúcim valcom a naklonenou rovinou. Čas zastavenia otáčania t_0 je daný vzťahom (5). Keďže V okamihu zastavenia otáčania platí $v = \omega r = 0$ a súčasne $\varphi_2 < \alpha_v$. Sú splnené podmienky pre valivý pohyb. Zrýchlenie valivého pohybu určíme z rovníc (1), (6) $a_{v2} = \frac{2}{3} g \sin \varphi_k$.

Dráhu l prekoná za čas

$$t_{2l} = \sqrt{\frac{2l}{a_{v2}}} = \sqrt{\frac{3l}{g \sin \varphi_k}} = \sqrt{\frac{3l \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_k}}{g \tan \varphi_k}} = \sqrt{\frac{3l}{g} \sqrt{1 + \frac{1}{f_k^2}}} .$$

Pre dané hodnoty $t_{2l} \approx 0,96$ s.

Celkový čas $t_2 = t_{2l} + t_0$. Pre vypočítané hodnoty $t_2 \approx 1,25$ s. 1 b

Ak je $\varphi_3 < \varphi_k$, začne sa valec najprv pohybovať nahor so zrýchlením (7) $a_{k3} < 0$. Rýchlosť $v = a_{k3} t$. Moment sily trenia brzdí rotáciu s uhlovým zrýchlením (4) a uhlová rýchlosť

$$\omega = -\omega_0 + \varepsilon_{k3} t = -\omega_0 + \frac{2 f_k g \cos \varphi_3}{r} t .$$

Valec prešmykuje až po dosiahnutie podmienky $v = \omega r$ za čas t_{31} , tzn. $a_{k3} t_{31} = r(-\omega_0 + \varepsilon_{k3} t_{31})$, odkiaľ máme

$$t_{31} = \frac{r \omega_0}{r \varepsilon_{k3} - a_{k3}} = \frac{r \omega_0}{g (3 f_k \cos \varphi_3 - \sin \varphi_3)} . \text{ Pre dané hodnoty } t_{31} \approx 0,254 \text{ s.} \quad 0,5 \text{ b}$$

Rýchlosť pohybu pri prechode do valivého pohybu

$$v_3 = a_{k3} t_{31} = r \omega_0 \frac{\sin \varphi_3 - f_k \cos \varphi_3}{3 f_k \cos \varphi_3 - \sin \varphi_3} \quad (\approx -0,198 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})$$

a prejde dráhu $l_{31} = \frac{1}{2} a_{v3} t_{31}^2 = \frac{(r \omega_0)^2}{3g} \frac{\sin \varphi_3}{(3 f_k \cos \varphi_3 - \sin \varphi_3)^2} . \quad (\approx 0,053 \text{ m})$

Ďalej sa pohybuje nahor až do zastavenia valivým pohybom za čas

$$t_{32} = -\frac{v_3}{a_{v3}} = \frac{3 r \omega_0}{2 g \sin \varphi_3} \frac{f_k \cos \varphi_3 - \sin \varphi_3}{3 f_k \cos \varphi_3 - \sin \varphi_3} . \text{ Pre dané hodnoty } t_{32} \approx 0,117 \text{ s.} \quad 0,5 \text{ b}$$

a prejde dráhu $l_{32} = \frac{v_3^2}{2 a_{v3}} = \frac{3 (r \omega_0)^2}{4 g \sin \varphi_3} \left(\frac{\sin \varphi_3 - f_k \cos \varphi_3}{3 f_k \cos \varphi_3 - \sin \varphi_3} \right)^2 . \quad (\approx 0,0115 \text{ m})$

Z najvyššieho bodu sa valec pohybuje nadol valivým pohybom na dráhe $l_3 = l_{31} + l_{32} + l$ za čas

$$t_{33} = \sqrt{\frac{2l_3}{a_{v3}}} = \sqrt{\frac{3l}{g \sin \varphi_3} + \left(\frac{r \omega_0}{g \sin \varphi_3} \right)^2 \left[\left(\frac{\sin \varphi_3}{3 f_k \cos \varphi_3 - \sin \varphi_3} \right)^2 + \left(\frac{3 \sin \varphi_3 - f_k \cos \varphi_3}{2 (3 f_k \cos \varphi_3 - \sin \varphi_3)} \right)^2 \right]} .$$

Pre dané hodnoty $t_{33} \approx 1,127$ s. 0,5 b

Výsledný čas je $t_3 = t_{31} + t_{32} + t_{33}$. Pre vypočítané hodnoty $t_3 \approx 1,50$ s. 0,5 b

4. Vodná raketa

Riešenie:

- a) Začiatkový objem vody $V_{10} = f V_0$ a hmotnosť vody $m_{10} = V_{10} \rho \approx 18 \text{ kg}$.

Začiatkový objem vzduchu $V_{20} = \frac{m_{20}}{M_m} \frac{RT_0}{p_0} = (1-f)V_0$, odkiaľ

$$m_{20} = (1-f) \frac{p_0 V_0 M_m}{RT_0}. \text{ Pre dané hodnoty } m_{20} \approx 0,57 \text{ kg.}$$

1 b

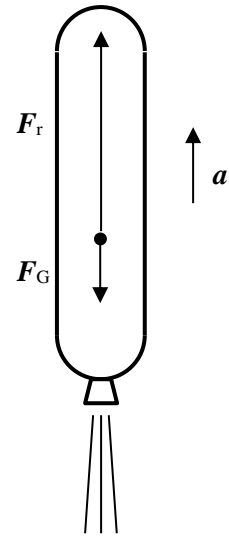
- b) Na raketu pôsobí tiažová sila $F_G = m g$, kde $m = m_0 + m_1 + m_2$ je celková hmotnosť, vrátane hmotnosti m_1 vody a m_2 stlačeného vzduchu. Voda prúdica z dýzy vyvoláva reaktívnu ťahovú silu F_r , ktorá raketu poháňa, obr. RB-4.

Na raketu pôsobí aj odpor prostredia, ktorý však považujeme za veľmi malý.

Pohybová rovnica rakety

$$m a = -m g + F_r. \quad (1)$$

*pohybová rovnica a pomenovanie síl 1 b
obrázok 1 b*



Obr. RB-4

- c) V čase t je rýchlosť rakety v . Z dýzy rakety po otvorení ventilu je vytlačaná voda rýchlosťou v_r . Hmotnosť m rakety sa mení, pričom zmena hmotnosti $dm < 0$. Hybnosť dp vytekajúcej vody s hmotnosťou $-dm$ je rovná zmene hybnosti rakety

$$-dm(v - v_r) = (m + dm)(v + dv) - m v. \quad (2)$$

(Mešcherského rovnica)

Pozn.: Hmotnosť vody, ktorá vytečie z rakety za krátky čas dt je rovná úbytku hmotnosti rakety $dm_v = -dm$. Za tento čas sa zmení rýchlosť pohybu rakety z hodnoty v na hodnotu $v + dv$. Rýchlosť pohybu vodného stĺpca vo valci považujeme za zanedbateľnú, tzn. predpokladáme, že valec i voda sa pohybujú rovnakou rýchlosťou v .

Po úprave

$$-v_r dm = m dv - dm dv \approx m dv.$$

Pozn.: Člen $dm \times dv$ v rovnici (2) je malý (druhého rádu), zanedbateľný voči zvyšným malým členom prvého rádu.

Rovnicu delíme časom dt

$$m \frac{dv}{dt} = -v_r \frac{dm}{dt} = F_r, \text{ resp. } F_r = v_r \frac{dm_v}{dt} = v_r \rho \frac{dV}{dt} = \rho \frac{\pi d^2}{4} v_r^2. \quad (3)$$

Rýchlosť v_r prúdenia vody z dýzy určíme pomocou Bernoulliho rovnice. Vo vzťažnej sústave spojenjej s raketou na vodné teleso pôsobí na voľnej hladine tlak p vzduchu a z vonkajšieho prostredia dýzy atmosférický tlak p_a . Okrem toho sa voda nachádza v silovom poli, gravitačnom poli Zeme a poli zotrvačnej sily (v neinerciálnej sústave so zrýchlením a). Na vodu v rakete pôsobí silové pole s intenzitou $(g - a)$. Vzhľadom na malý výškový rozdiel h hladiny vody nad otvorom dýzy rozdiel potenciálnych členov $\rho (g + a) h$ považujeme za veľmi malý a zanedbáme ho. Označíme v_h rýchlosť hladiny v nádobe $v_h = v_r (S_h/S_d)$.

$$\frac{1}{2} \rho v_r^2 + p_a = \frac{1}{2} \rho v_h^2 + p, \text{ resp. } \frac{1}{2} \rho v_r^2 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) = p - p_a. \quad (4)$$

Tlak vzduchu v nádobe určíme zo stavovej rovnice pre adiabatický dej. Na začiatku je tlak vzduchu p_0 a objem $V_{20} = (1-f) V_0$.

$$p = p_0 (1-f)^\kappa \left(\frac{V_0}{V}\right)^\kappa, \text{ kde } V \text{ je objem vzduchu v nádobe pri tlaku } p.$$

Najmenší tlak, keď takmer všetka voda je vytlačená, tzn. $V = V_0$,

$$p_{\min} = p_0 (1-f)^\kappa \approx 1,1 \text{ MPa.} \quad 1 \text{ b}$$

V rovnici (4) môžeme tlak p_a zanedbať.

Rýchlosť prúdenia vody v dýze

$$v_r = \sqrt{\frac{2p}{\rho \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)}}, \text{ pre } (d/D)^4 \ll 1 \text{ je } v_r \approx \sqrt{\frac{2p}{\rho}}. \quad (5)$$

Reaktívna sila (3) po dosadení zo (4) je

$$F_r \approx \frac{\pi d^2}{2} p = \frac{\pi d^2}{2} p_0 \left(\frac{V_{20}}{V}\right)^\kappa. \quad (6) \quad 1 \text{ b}$$

Maximálna hodnota ťahovej sily (pre $V = V_{20}$) $F_{r \max} \approx 5,7 \text{ kN}$, minimálna (pre $V = V_0$) $F_{r \min} \approx 1,6 \text{ kN}$. 1 b

Tiažová sila F_G sa mení podľa obsahu vody zo začiatkovej hodnoty $F_{G \max} \approx 197 \text{ N}$ až po hodnotu $F_{G \min} \approx 20 \text{ N}$. V porovnaní s reaktívnou silou je počas prúdenia vody z dýzy tiažová sila zanedbateľná. Zrýchlenie a podľa (1) je na začiatku $a_1 \approx 290 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, na konci $a_2 \approx 800 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Pre výšku $h_1 \approx 57 \text{ cm}$ vodného stĺpca na začiatku máme $\rho a h_1 \approx 0,18 \text{ MPa}$, čo je v porovnaní s tlakom p_0 zanedbateľné. Predpoklad zanedbania potenciálnych členov v Bernoulliho rovnici je oprávnený. 1 b

d) Objemový prietok vody dýzou

$$Q_V = -\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV}{dt} = S_d v_r = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2p}{\rho}} = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2p_0 V_{20}^\kappa}{\rho}} \frac{1}{V^{\frac{\kappa}{2}}},$$

kde $-dV_1$ je úbytok objemu vody v rakete a $dV = -dV_1$ zmena objemu vzduchu v rakete za čas dt .

Rovnicu upravíme na tvar

$$V^{\frac{\kappa}{2}} dV = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2p_0 V_{20}^\kappa}{\rho}} dt. \quad (7)$$

Výsledok získame integráciou funkcie (7) v hraniciach zo začiatočného objemu vzduchu $V_{20} = (1-f) V_0$ do konečného objemu V_0 vzduchu za čas t_r .

$$\int_{V_{20}}^{V_0} V^{\frac{\kappa}{2}} dV = \int_0^{t_r} \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2p_0 V_{20}^\kappa}{\rho}} dt.$$

Po vyjadrení integrálov máme

$$t_r = \frac{8}{\kappa + 2} \frac{V_0}{\pi d^2} \left[\frac{1 - (1-f)^{\frac{\kappa}{2} + 1}}{(1-f)^{\frac{\kappa}{2}}} \right] \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}.$$

Pre dané hodnoty $t_r \approx 0,41$ s.

1,5 b

Z rovnice (1) a vzťahu (5) určíme zrýchlenie

$$a = \frac{F_r}{m} = \frac{1}{m} \frac{\pi d^2}{2} p_0 \left(\frac{V_{20}}{V} \right)^\kappa.$$

V skutočnosti je závislosť zrýchlenia od času pomerne zložitá. Môžeme určiť začiatočnú a_1 a konečnú a_2 hodnotu zrýchlenia

$$a_1 = \frac{1}{m_0 + m_{10} + m_{20}} \frac{\pi d^2}{2} p_0 \left(\frac{V_{20}}{V_{20}} \right)^\kappa. \text{ Pre dané hodnoty } a_1 \approx 282 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad 0,5 \text{ b}$$

$$a = \frac{1}{m_0 + m_{20}} \frac{\pi d^2}{2} p_0 (1-f)^\kappa. \text{ Pre dané hodnoty } a_2 \approx 758 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad 0,5 \text{ b}$$

Zrýchlenie od začiatočnej hodnoty rastie. Ak predpokladáme lineárny nárast, máme funkciu

$$a = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{t_r} t.$$

Rýchlosť určíme integráciou zrýchlenia

$$v_m = \int_0^{t_r} a \, dt = \int_0^{t_r} \left(a_1 + \frac{a_2 - a_1}{t_r} t \right) dt = a_1 t_r + \frac{a_2 - a_1}{2} t_r = \frac{a_2 + a_1}{2} t_r.$$

Pre dané hodnoty $v_m \approx 213 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

0,5 b

5. Termodynamický cyklus

Riešenie:

- a) Látkové množstvo n plynu určíme zo stavovej rovnice $pV = nRT$.

$$n = \frac{p_0 V_0}{RT_0}. \text{ Pre dané hodnoty } n = 2,4 \text{ mol.} \quad 1 \text{ b}$$

Počet molekúl

$$N = n N_A = \frac{p_0 V_0}{RT_0} N_A = \frac{p_0 V_0}{k_B T_0}.$$

Pre dané hodnoty $N \approx 1,4 \times 10^{24}$. 1 b

- b) V stave 1 je $V_1 = V_0$, $T_1 = 350 \text{ K}$, $p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0}$, pre dané hodnoty $p_1 \approx 2,8 \text{ MPa}$. 1 b

Medzi začiatočným stavom označeným 0 a stavom 2 je adiabatický dej, pre ktorý platí

$$p_0 V_0^\kappa = p_2 V_2^\kappa. \quad (1)$$

Medzi stavmi 1 – 2 prebehol izotermický dej

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \quad (2)$$

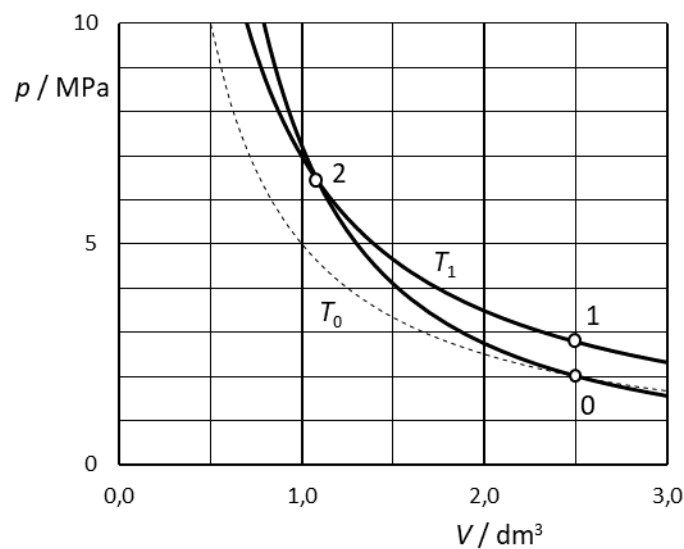
Z (1) a (2) určíme stavové veličiny pre stav 2 dusíka

$$V_2 = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} V_0 = \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} V_0,$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = p_0 \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

Pre dané hodnoty $V_2 \approx 1,1 \text{ dm}^3$, $p_2 \approx 6,5 \text{ MPa}$. 2 b

Diagram p – V deja je na obr. RB–4



Obr. RB–4

graf 1 b

- c) Vonkajšie sily konajú kladnú prácu W_1 počas izotermickej kompresie 1–2. Počas adiabatickej expanzie 2–0 je práca W_2 vykonaná vonkajšími silami záporná. Celková práca počas cyklu je $W = W_1 + W_2$ (počas deja 0–1 sa práca nekoná).

$$W_1 = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1}{V} dV = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_0 V_0}{\kappa - 1} \frac{T_1}{T_0} \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right),$$

$$W_2 = - \int_{V_2}^{V_0} p dV = - \int_{V_2}^{V_0} \frac{p_0 V_0^\kappa}{V^\kappa} dV = - p_0 V_0^\kappa \frac{1}{-\kappa + 1} (V_0^{-\kappa+1} - V_2^{-\kappa+1}) =$$

$$= \frac{1}{\kappa - 1} p_0 V_0 \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_2} \right)^{\kappa-1} \right] = - \frac{1}{\kappa - 1} p_0 V_0 \left[\frac{T_1}{T_0} - 1 \right].$$

Pre dané hodnoty $W_1 \approx 5,89$ kJ, $W_2 \approx -5,00$ kJ

Pozn.: Keďže počas adiabatického deja nedochádza k výmene tepla medzi valcom a okolím, je práca W_2 vonkajších síl rovná zmene ΔU vnútornej energie U . Možno teda použiť aj výpočet bez integrálu

$$W_2 = \Delta U = C_v (T_0 - T_1) = \frac{s}{2} n R (T_0 - T_1) = \frac{1}{\kappa - 1} p_0 V_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_0} \right).$$

Celková práca

$$W = \frac{p_0 V_0}{\kappa - 1} \frac{T_1}{T_0} \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) - \frac{p_0 V_0}{\kappa - 1} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) = \frac{p_0 V_0}{\kappa - 1} \left[\frac{T_1}{T_0} \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) - \frac{T_1}{T_0} + 1 \right].$$

Pre dané hodnoty $W \approx 890$ J.

2 b

- d) Počas deja 0–1 sa zvyšuje teplota dusíka, a tým aj jeho vnútorná energia. Práca sa nekoná, tzn. zmena vnútornej energie je rovná dodanému teplu $Q_1 = \Delta U_{0-1}$

$$Q_1 = \Delta U = C_v (T_1 - T_0) = \frac{1}{\kappa - 1} p_0 V_0 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) \text{ (rovnako ako pre } -W_2)$$

Počas deja 1–2 nedochádza ku zmene teploty, a teda nemení sa vnútorná energia plynu. Uvoľnené teplo Q_2 je tak rovné práci W_1 vonkajších síl

$$Q_2 = W_1 = \frac{p_0 V_0}{\kappa - 1} \frac{T_1}{T_0} \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right).$$

Pre dané hodnoty $Q_1 \approx 5,00$ kJ, $Q_2 \approx 5,89$ kJ.

1 b

Pomer $\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{\ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right)}{\ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) + \frac{T_0}{T_1} - 1}$. Pre dané hodnoty $\eta \approx 6,6$.

1 b

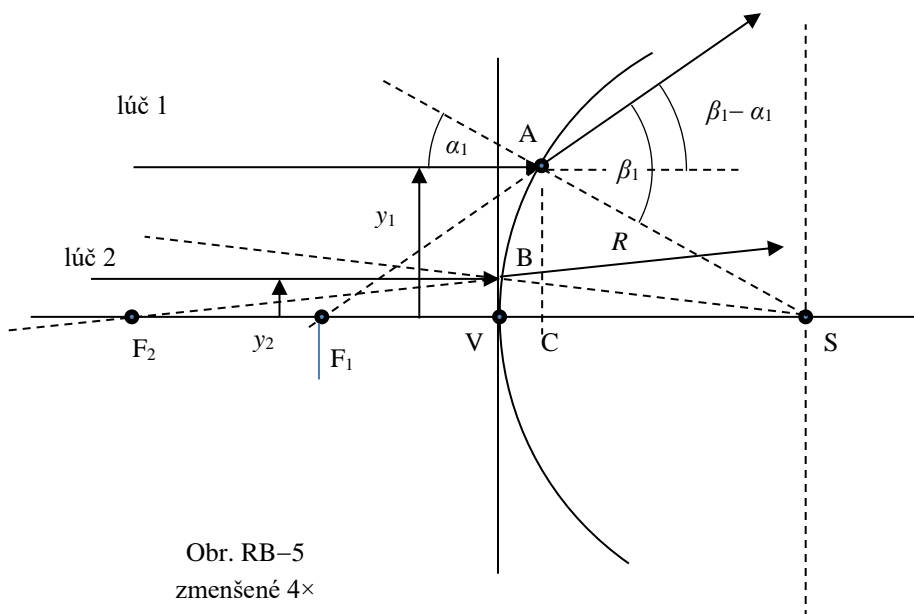
6. Šošovka s guľovým povrchom

Riešenie:

a) Obrázok RB-5.

2 b

Opis konštrukcie: Lúč 1 dopadá kolmo na čelnú rovinnú stranu šošovky a pokračuje ďalej bez lomu až do bodu A na rozhraní zakrivenej plochy. Uhol dopadu $\alpha = \arcsin(y/R)$. Pre lúč 1 $\alpha_1 \approx 30^\circ$, pre lúč 2 $\alpha_2 \approx 7,2^\circ$. Podľa zákona lomu uhol lomu $\beta = \arcsin(n \sin \alpha) = \arcsin(n y / R)$, $\beta_1 \approx 64,2^\circ$, $\beta_2 \approx 13^\circ$. V bodoch A a B zakreslíme lomené lúče. Priesečník predĺženia lomeného lúča s optickou osou predstavuje ohnisko. Pre lúča 1 a 2 dostávame dve rôzne polohy ohniska F_1 a F_2 . 2 b



b) Určíme vzdialenosť $f = FV = FC - VC$. Lomený lúč zvierá s osou uhol $\beta - \alpha$.

$$FC = \frac{y}{\tan(\beta - \alpha)}, \quad VC = R - R \cos \alpha, \quad \text{pričom } \sin \alpha = \frac{y}{R}.$$

Použijeme vzťahy

$$\begin{aligned} \tan(\beta - \alpha) &= \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \alpha)} = \frac{\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha}{\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha} = \\ &= \frac{n \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha} \sin \alpha}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + n \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

a $1 - \cos \alpha = 1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$

Po dosadení za $\sin \alpha$ máme

$$f = R \left[\frac{\sqrt{1-n^2 \sin^2 \alpha} \sqrt{1-\sin^2 \alpha} + n \sin^2 \alpha}{n \sqrt{1-\sin^2 \alpha} - \sqrt{1-n^2 \sin^2 \alpha}} - 1 + \sqrt{1-\sin^2 \alpha} \right] =$$

$$= R \left(\frac{\sqrt{1-n^2 \frac{y^2}{R^2}} \sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}} + n \frac{y^2}{R^2}}{n \sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}} - \sqrt{1-n^2 \frac{y^2}{R^2}}} + \sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}} - 1 \right). \quad (1) \quad 2 \text{ b}$$

Pre jednotlivé lúče $f_1 \approx 96,4 \text{ mm}$, $f_2 \approx 194,9 \text{ mm}$. 1 b

- c) Pre $y \ll R$ je $\sin \alpha \ll 1$. Keď použijeme približné vyjadrenia $\sqrt{1-n^2 \frac{y^2}{R^2}} \approx 1$ a $\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}} \approx 1$, dostávame z (1) vzťah pre ohniskovú vzdialenosť

$$f = \frac{R}{n-1}.$$

Pre dané hodnoty $f \approx 20 \text{ cm}$. 1 b

Ako vidíme z výsledku, ohnisková vzdialenosť f pre lúče blízke k optickej osi, $y \ll R$, nezávisí od vzdialenosti y . Pre zväzky lúčov blízke k optickej osi možno šošovku používať ako súčiastku optických zobrazovacích sústav.

- d) Medzný uhol α_m je taký, pre ktorý $\beta_m = 90^\circ$ (hranica totálneho odrazu). Pre uhol $\alpha > \alpha_m$ sa lúče od rozhrania skla a vzduch odrazia a do obrazového priestoru nevstúpia.

$$\sin \beta_m = n \sin \alpha_m = 1, \text{ odkiaľ } \sin \alpha_m = \frac{1}{n},$$

pre dané hodnoty $\alpha_m \approx 33,7^\circ$. 1 b

Pre tento uhol dostávame podľa (1) $f_m \approx 32,4 \text{ mm}$. 1 b

7. Pokovovanie vodivých predmetov

– Experimentálna úloha

10 b

60. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie B

Autori návrhov úloh:

Ivo Čáp 1–3, 5, 7, Dušan Nemeč 4, Ľubomír Konrád 6

Recenzia a úprava úloh a riešení:

Daniel Klivanec, Ľubomír Mucha

Redakcia:

Ivo Čáp

Vydal:

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019