

60. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2018/2019
kategória A

Riešenie úloh krajského kola

1. Odpružený dopad

Riešenie:

- a) Rýchlosť dopadu debničky na piest určíme zo zákona zachovania mechanickej energie

$$v_0 = \sqrt{2g(h-l-b)} . \quad 1 \text{ b}$$

Rýchlosť v_1 piestu s debničkou krátko po nepružnom náraze určíme podľa zákona zachovania hybnosti

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_1 , \text{ a teda}$$

$$v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2g(h-l-b)} . \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $v_1 \approx 1,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. 1 b

- b) Na začiatku je tlak plynu vo valci

$$p_0 = p_a + \frac{m_2 g}{S} .$$

Pri stláčaní piestu pôsobí na piest tlak p plynu vo vnútri valca a atmosférický tlak p_a .

Tlaková sila plynu $F_p = (p - p_a) S$.

Keďže dej v plyne vo valci je adiabatický, platí

$$pV^\kappa = p_0 V_0^\kappa , \text{ resp. } p = p_0 \left(\frac{l}{l-x} \right)^\kappa = p_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^{-\kappa} \approx p_0 \left(1 + \frac{\kappa}{l} x \right) ,$$

a teda výsledná tlaková sila smerom nadol

$$F_p = (p_a - p) S = \left[p_a - \left(p_0 + \kappa \frac{p_0}{l} x \right) \right] S = -m_2 g - \kappa \frac{p_0 S}{l} x .$$

Pri výchylke x zo začiatkovej polohy vykoná vzduch (vo valci a vonkajší) prácu

$$W = \int_0^x F_p dx = -m_2 g x - \int_0^x \frac{\kappa p_0 S}{l} x dx = -m_2 g x - \frac{\kappa p_0 S}{2l} x^2 .$$

Okrem toho vykoná tiažová sila prácu

$$W_g = -\Delta E_p = (m_1 + m_2) g x .$$

Počas stláčania plynu klesá kinetická energia. Pri maximálnej výchylke x_m je kinetická energia nulová, preto platí

$$\Delta E_k = W_g + W_p, \text{ resp. } -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1^2 = (m_1 + m_2)g x_m - \left(m_2 g x_m + \frac{\kappa p_0 S}{2l} x_m^2 \right).$$

Kvadratickú rovnicu upravíme na tvar

$$x_m^2 - 2 \frac{(m_1 + m_2) g l}{\kappa p_0 S} x_m - \frac{(m_1 + m_2) v_1^2 l}{\kappa p_0 S} = 0.$$

Jej riešenie je

$$x_m = \frac{(m_1 + m_2) g l}{\kappa p_0 S} + \sqrt{\left[\frac{(m_1 + m_2) g l}{\kappa p_0 S} \right]^2 + \frac{m_1^2 v_0^2 l}{\kappa p_0 S (m_1 + m_2)}},$$

a s použitím (1)

$$x_m = \frac{(m_1 + m_2) g l}{\kappa p_0 S} + \sqrt{\left[\frac{(m_1 + m_2) g l}{\kappa p_0 S} \right]^2 + \frac{2 g m_1^2 (h - l - b) l}{\kappa p_0 S (m_1 + m_2)}}. \quad 3 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $x_m \approx 2,5 \text{ cm}$.

1 b

b) Teplotu určíme podľa stavovej rovnice pre adiabatický dej v ideálnom plyne

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\kappa-1} = T_0 \left(\frac{l}{l - x_m} \right)^{\kappa-1}. \quad 2 \text{ b}$$

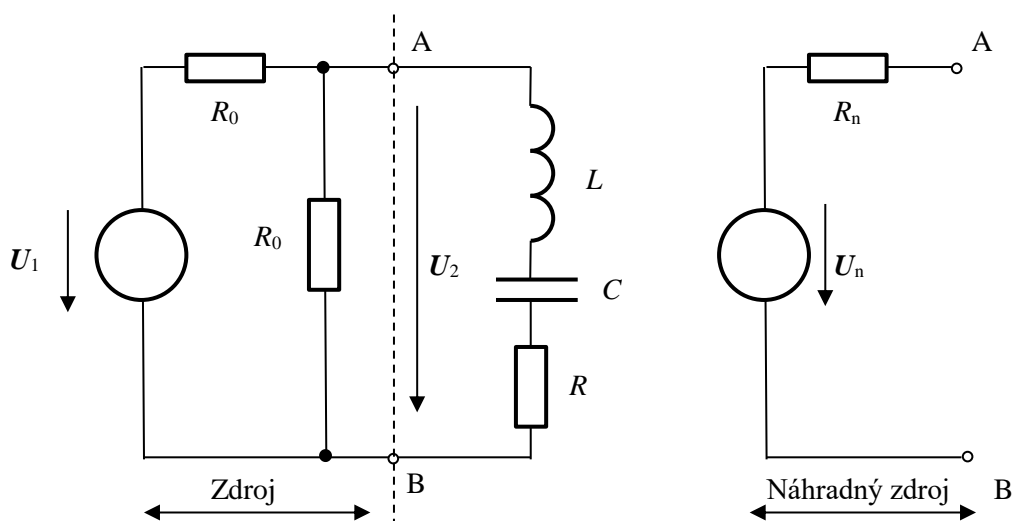
Pre dané hodnoty $T \approx 323 \text{ K}$.

1 b

2. Absorpčné spektrum svetla

Riešenie:

a)



Obr. RA-1

Na určenie napätia U_2 možno použiť rôzne metódy. Výhodné je presunúť výstupný rezistor pred uzly AB, obr. RA-1, a obvod naľavo od brány AB nahradiť ekvivalentným náhradným napäťovým zdrojom s napätím $U_n = U_1/2 = U_{20}$ a odporom $R_n = R_0/2$. Pozn.: Obedva zdroje majú rovnaké napätie naprázdno $U_{20} = U_1/2$ a prúd nakrátko U_1/R_0 – sú rovnocenné.

Po pripojení RLC vetvy s impedanciou

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}, \text{ kde } \omega \text{ je uhlová frekvencia napätia a } j = \sqrt{-1} \text{ – imaginárna jednotka.}$$

Výstupné napätie U_2 určíme ako napätie na deliči napätia R_n, Z

$$U_2 = U_n \frac{Z}{R_n + Z}.$$

Pre analýzu napätia je výhodné vyjadriť zmenu výstupného napätia od hodnoty U_{20}

$$\begin{aligned} \Delta U_2 = U_2 - U_{20} &= -U_{20} \frac{R_n}{R_n + Z} = -U_{20} \frac{1}{1 + \frac{Z}{R_n}} = \\ &= -U_{20} \frac{1}{1 + \frac{2}{R_0} \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)}. \end{aligned} \quad 1 \text{ b}$$

Veľkosť poklesu napätia

$$\begin{aligned} \Delta U_2 &= U_{20} \frac{1}{\left| 1 + \frac{2R}{R_0} + j \left(\omega \frac{2L}{R_0} - \frac{2}{\omega C R_0} \right) \right|} \\ &= U_{20} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2R}{R_0} \right)^2 + \left(\omega \frac{2L}{R_0} - \frac{2}{\omega C R_0} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

Maximálna hodnota ΔU_2 zodpovedá minimálnej hodnote menovateľa, tzn.

$$\omega \frac{2L}{R_0} - \frac{2}{\omega C R_0} = 0,$$

$$\text{odkiaľ máme } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}}, \text{ resp. } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{CL}}. \quad (2) \quad 1 \text{ b}$$

$$\Delta U_{2\max} = U_{20} \frac{R_0}{R_0 + 2R}. \quad (3) \quad 1 \text{ b}$$

b) Bez prítomnosti absorpčnej vrstvy je výkon na záťaži

$$P_{20} = \frac{U_{20}^2}{R_0} = \frac{U_1^2}{4R_0}. \quad (4)$$

Pri frekvencii f_0 je impedancia $Z = R$ a výstupné napätie

$$U_2 = U_n \frac{R}{R_n + R} = \frac{U_1}{2} \frac{2R}{R_0 + 2R}$$

Výkon na záťaži

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_0} = \frac{U_1^2}{4R_0} \left(\frac{2R}{R_0 + 2R} \right)^2 \quad (5)$$

Pomer p určíme z (4) a (5)

$$p = \frac{P_2}{P_{20}} = \left(\frac{2R}{R_0 + 2R} \right)^2 \quad 1 \text{ b}$$

c) Relatívny pokles napätia $\Delta U_2 / \Delta U_{2 \max}$ vyjadríme z výrazov (1) a (3)

$$\frac{\Delta U_2}{\Delta U_{2 \max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{R_0 + 2R} \right)^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Medzné uhlové frekvencie určíme z rovnice

$$\left(\frac{2}{R_0 + 2R} \right)^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = 1, \text{ resp. } \left(\frac{2}{R_0 + 2R} \right) \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \pm 1,$$

ktorú upravíme na základný tvar kvadratickej rovnice

$$\omega^2 \pm \left(\frac{R_0 + 2R}{2L} \right) \omega - \omega_0^2 = 0.$$

Jej riešenie má 4 korene

$$\omega_{1,2,3,4} = \pm \left(\frac{R_0 + 2R}{4L} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{R_0 + 2R}{4L} \right)^2 + \omega_0^2},$$

z ktorých fyzikálny význam $\omega > 0$ majú iba dva korene

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{\left(\frac{R_0 + 2R}{4L} \right)^2 + \omega_0^2} + \frac{R_0 + 2R}{4L} \right] \quad 0,5 \text{ b}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{\left(\frac{R_0 + 2R}{4L} \right)^2 + \omega_0^2} - \frac{R_0 + 2R}{4L} \right]. \quad 0,5 \text{ b}$$

Šírka absorpčnej čiary

$$\Delta f = |f_1 - f_2| = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{R_0 + 2R}{2L} \right] \quad (6)$$

a relatívnu šírku absorpčnej čiary určíme pomocou výsledkov (6) a (2)

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \left(\frac{R_0}{2} + R \right) \sqrt{\frac{C}{L}} \quad 1 \text{ b}$$

d) Pre optickú čiaru $\lambda = 400 \text{ nm}$ a $\Delta\lambda / \lambda = -\Delta f / f = 1,0 \times 10^{-4}$ a $p = 0,30$, $R_0 \approx 377 \Omega$ a $\lambda = c / f$ máme

$$R = \frac{R_0}{2} \frac{\sqrt{p}}{1 - \sqrt{p}} \quad . \text{ Pre dané hodnoty } R \approx 228 \Omega. \quad 1 \text{ b}$$

Zo vzťahov

$$\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \frac{2}{R_0} (1 - \sqrt{p}) \quad \text{a} \quad \sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{c}$$

určíme

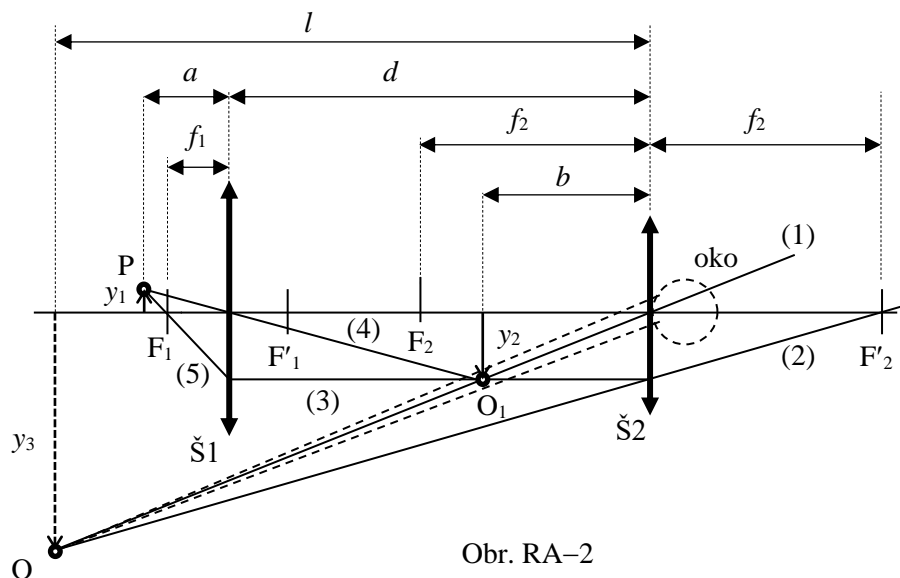
$$C = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{c} \frac{2}{R_0} (1 - \sqrt{p}), \text{ pre dané hodnoty } C \approx 5,1 \times 10^{-23} \text{ F} \quad 1 \text{ b}$$

$$L = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - \sqrt{p}} \frac{R_0}{2} \frac{\lambda}{c} \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \text{ pre dané hodnoty } L \approx 8,8 \times 10^{-10} \text{ H}. \quad 1 \text{ b}$$

3. Mikroskop

Riešenie:

- a) Body s uhlovou vzdialenosťou δ zo vzdialenosti l majú vzájomnú vzdialenosť v rovine kolmej na optickú os $\delta = l \varphi$,
pre dané hodnoty $\delta = (0,25 \text{ m}) \times (\pi \text{ rad}/180^\circ/60') = (0,25 \text{ m}) \times (2,91 \times 10^{-4} \text{ rad}) = 72,7 \mu\text{m}$. 0,5 b
- b) Potrebné zväčšenie $z_m = \delta / (\lambda/2)$, pre dané hodnoty $z \approx 291$. 0,5 b
- c) Obr. RA-2: V schéme mikroskopu sú označené šošovky, ich ohniská, predmet P, výsledný obraz O, obraz O_1 vytvorený šošovkou Š1, ktorý je predmetom šošovky Š2, predmetové vzdialenosti a a b , obrazová vzdialenosť l , priečne veľkosti predmetu y_1 , reálneho obrazu y_2 a výsledného zdanlivého obrazu y_3 a vzdialenosť šošoviek d .



Obr. RA-2 2 b

Opis kreslenia schémy:

Na optickú os umiestnime Š2 a označíme polohu jej ohnisk. Nakreslíme pozorovaný obraz O vo vzdialenosti l . Stredom Š2 vedieme lúč (1) do bodu O a z obrazového ohniska F_2' do bodu O lúč (2), ktorý zodpovedá lomu lúča (3) rovnobežného s osou na šošovke Š2. V priesečníku lúčov (1) a (3) je obraz O_1 , ktorý musí byť skutočný. Umiestnime Š1 tak, aby ohnisko F_1' bolo pred ohniskom F_2 . Predmet P je na priesečníku lúčov (4) stredom Š1 a (5) prechádzajúci ohniskom F_1 a šošovkou Š1 sa láme na lúč (3) rovnobežný s osou. Pre ilustráciu je zakreslené aj oko pozorovateľa, do ktorého dopadajú lúča zo zdanlivého obrazu O.

1 b

Pre zobrazenie šošovkami platia zobrazovacie rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d-b} = \frac{1}{f_1}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f_2}. \quad (2)$$

Pre zväčšenie platí

$$z_1 = \frac{y_2}{y_1} = \frac{d-b}{a},$$

$$z_2 = \frac{y_3}{y_2} = \frac{l}{b}.$$

Celkové zväčšenie je

$$z = \frac{y_2}{y_1} \frac{y_3}{y_2} = z_1 z_2 = \frac{d-b}{a} \frac{l}{b}. \quad (3)$$

Z rovníc (1), (2) a (3) vylúčime vzdialenosť

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d - \frac{l f_2}{l + f_2}} = \frac{1}{f_1}, \quad (4)$$

$$a = \frac{d}{z} \frac{l + f_2}{f_2} - \frac{l}{z}. \quad (5)$$

Zo sústavy dvoch rovníc pre neznáme veličiny a a z určíme hľadané veličiny.

Z (5) vyjadríme d a dosadíme do (4). Po úprave máme

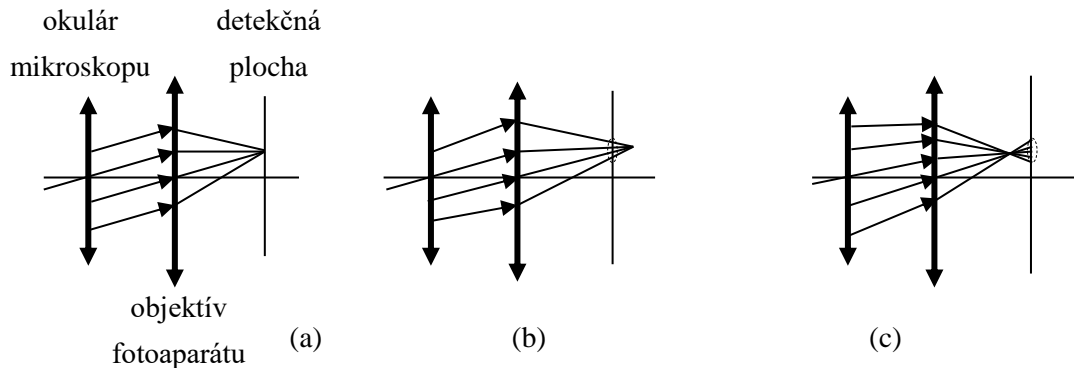
$$a = f_1 \left(1 + \frac{l + f_2}{z f_2} \right). \quad (6) \quad 1 \text{ b}$$

Po dosadení (6) do (5) dostaneme

$$d = \left[1 + \frac{f_1}{l} \left(z + \frac{l}{f_2} + 1 \right) \right] \frac{l f_2}{l + f_2}. \quad (7) \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $a \approx 16 \text{ mm}$, $d \approx 30 \text{ cm}$.

- d) Aby sa získal obraz predmetu (vizuálny alebo fotografický), musí sa vytvoriť reálny obraz buď šošovkou oka alebo objektívom fotoaparátu. V oboch prípadoch sa musí obraz zaostriť do detekčnej roviny (očnej sietnice alebo záznamového média).



Obr. RA-3

Obr. RA-3 a vysvetlenie 2 b

Pre pozorovanie okom obraz predmetu zaostrujeme na zrkovú vzdialenosť l , pre fotografovanie sa zvyčajne zaostruje mikroskop na obraz v nekonečne (lúče vystupujúce z okuláru sú rovnobežné), obr. RA-3(a), a bodový predmet mikroskopu sa zobrazí ako bod v detekčnej rovine. Ak je bod predmetu mikroskopu vo vzdialenosti menšej ako je vzdialenosť zaostrého bodu, na ktorý je mikroskop zaostrný, sú lúče vychádzajúce z okuláru rozbiehavé a obraz vzniká za detekčnou rovinou, obr. RA-3(b). V detekčnej rovine zväzok svetla pokrýva plôšku označenú v obrázku. Obraz bodu predmetu je v detekčnej rovine rozmazaný. Podobná situácia nastane, ak je bod predmetu ďalej ako je zaostrý bod, lúče vychádzajúce z okuláru sú zbiehavé a obraz bodu sa vytvorí pred detekčnou rovinou, obr. RA-3(c). Zväzok svetla v detekčnej rovine pokrýva plôšku označenú v obrázku. Obraz bodu predmetu je v detekčnej rovine rozmazaný.

Ak sa fotografuje cez mikroskop hrubá (priestorová) vzorka, zobrazí sa ostro iba jedna rovina vzorky, ale body mimo tejto roviny spôsobujú rozmazanie obrazu (neostrý obraz). Obyčajným mikroskopom sa preto fotografujú iba tenké (dvojrozmerné) vzorky.

1 b

Pri pozorovaní okom problém neostrosti odpadá, keďže oko je schopné akomodovať na rôzne vzdialenosti, ako keď bežne pozorujeme očami priestorové predmety. Keď pozorujeme okom priestorový predmet, v danom okamihu vnímame ostro detaily iba v určitej vzdialenosti. Oko je však schopné rýchlo „preladiť“ túto vzdialenosť, a tak sa v mozgu vytvára priestorový obraz predmetu.

1 b

Pozn.: Na zobrazovanie priestorových vzoriek sa používajú zložitejšie mikroskopy, napr. konfokálny mikroskop.

4. Exotický atóm bária

Riešenie:

- a) Pre atómovú hmotnosť $A = 138$ je polomer jadra $R \approx 6,2$ fm. 0,5 b
b) Sila, ktorá pôsobí na mión v elektrickom poli jadra

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze q}{R^3} r \quad \text{pre } 0 \leq r \leq R, \quad (1)$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze q}{r^2} \quad \text{pre } r \geq R, \quad (2)$$

kde $Q = Ze$ je náboj jadra, Z atómové číslo (počet protónov v jadre), $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C elementárny náboj, $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F·m⁻¹ elektrická konštanta a $q = -e$ náboj miónu.

Dôkaz:

Gaussova veta $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$, kde Q_S je náboj vo vnútri plochy S . Vzhľadom na stredovú

symetriu jadra sa za integračnú plochu zvolí guľová plocha so stredom v strede jadra a polomerom r .

Ak je integračná plocha S vo vnútri jadra, je náboj $Q_S = \frac{Ze}{V} V_S = \frac{Ze}{R^3} r^3$, a obsah $S = 4\pi r^2$.

Vektor \mathbf{E} elektrickej intenzity je na guľovú plochu S kolmý a na celej ploche má rovnakú veľkosť, preto

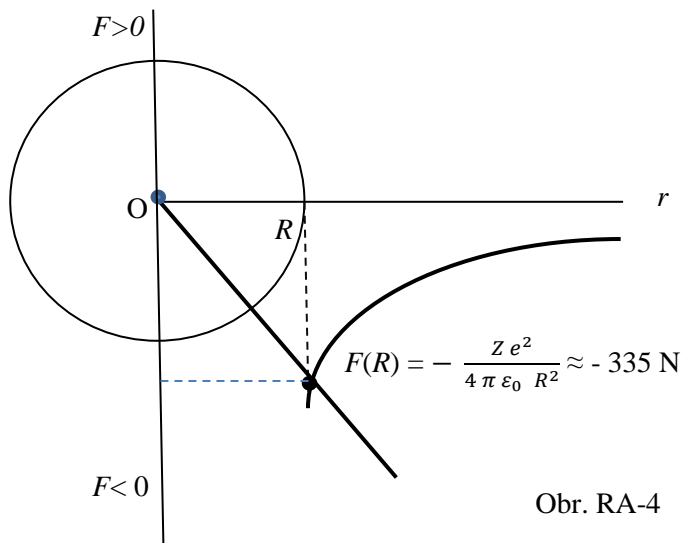
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E S = E 4\pi r^2 = \frac{Ze}{\epsilon_0 R^3} r^3.$$

$$F = qE = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, \quad \text{pre } 0 \leq r \leq R. \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

Ak je integračná plocha S mimo jadra, je $Q_S = Ze$ a platí

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E S = E 4\pi r^2 = \frac{Ze}{\epsilon_0}, \quad \text{odkiaľ máme}$$

$$F = qE = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{pre } r \geq R. \quad (2) \quad 1 \text{ b}$$



Obr. RA-4 1 b

Sila má smer ku stredu atómu, $F(R) \approx -335 \text{ N}$. 0,5 b

c) Pre pohyb na kružnicovej orbite platí rovnováha dostredivej (elektrickej) a zotrvačnej (odstredivej) sily

$$\frac{Z e^2 r}{4 \pi \epsilon_0 R^3} = m \frac{v^2}{r} \quad \text{pre } 0 \leq r \leq R, \quad (3)$$

$$\frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad \text{pre } r \geq R. \quad (4)$$

Súčasne platí kvantová podmienka $L = r p = m v r = n \hbar$. (5)

Z (3) a (5), resp. (4) a (5) máme

$$r_{1n} = \sqrt[4]{\frac{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2 R^3 A}{Z e^2 m}} \sqrt{n} = r_{11} \sqrt{n} \quad \text{pre } 0 \leq r \leq R, \quad (6) \quad 1 \text{ b}$$

$$r_{2n} = \frac{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2}{Z e^2 m} n^2 = r_{21} n^2 \quad \text{pre } r \geq R. \quad (7) \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $r_{11} \approx 5,77 \text{ fm}$ ($r_{12} \approx 8,11 \text{ fm}$), $r_{21} \approx 4,54 \text{ fm}$ ($r_{22} \approx 18,2 \text{ fm}$).

Z výsledku je zrejmé, že prvá orbita s polomerom $r_{11} < R$ je vo vnútri jadra a druhá r_{12} už mimo jadra. Prvá orbita r_{21} je vo vnútri jadra a druhá s polomerom $r_{22} > R$ je mimo jadra. Stavom $n = 1$ a $n = 2$ zodpovedajú trajektórie s polomerami $r_1 = r_{11}$ a $r_2 = r_{22}$.

0,5 b

- d) Rýchlosti určíme zo vzťahu (5) pre fyzikálne reálne orbity, teda po dosadení za r_{11} z (6), resp. za r_{22} zo (7)

$$v_1 = \sqrt[4]{\frac{Z e^2 \hbar^2}{4 \pi \varepsilon_0 m^3 R_0^3 A}}, \text{ pre dané hodnoty } v_1 \approx 9,71 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 0,32 \text{ } c_i \quad 1 \text{ b}$$

$$v_2 = \frac{Z e^2}{8 \pi \varepsilon_0 \hbar}, \text{ pre dané hodnoty } v_2 \approx 6,13 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 0,20 \text{ } c. \quad 1 \text{ b}$$

Hodnoty rýchlostí sú blízke rýchlosti svetla a preto určíme relativistické hodnoty hmotností a zodpovedajúce polomery trajektórií

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}, \text{ pre dané hodnoty } m_1 \approx 1,06 \text{ } m \text{ a } r_1 \approx 5,69 \text{ fm.} \quad 0,5 \text{ b}$$

$$m_2 = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}, \text{ pre dané hodnoty } m_2 \approx 1,02 \text{ } m \text{ a } r_2 \approx 17,8 \text{ fm.} \quad 0,5 \text{ b}$$

Vidíme, že zanedbaním relativistickej zmeny hmotnosti sa výsledky zmenia iba veľmi málo, $-1,4 \%$ pre r_1 a $-2,2 \%$ pre r_2 . Klasický výpočet poskytuje dobrú predstavu o stavoch miónu v atóme. 0,5 b

Pozn.: prideliť plný počet bodov aj za správne výsledky na dve platné číslice.

60. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy krajského kola kategórie A

Autor návrhov úloh:

Ivo Čáp

Recenzia a úprava úloh a riešení:

Daniel Klivanec, Ľubomír Mucha

Redakcia:

Ivo Čáp

Vydal:

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019