60. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2018/2019
kategória C – krajské kolo
Riešenia úloh

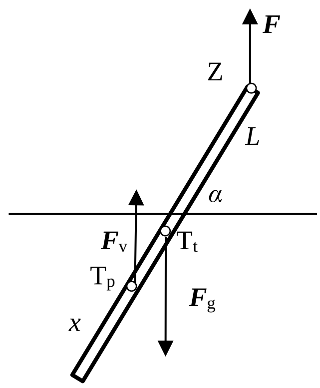
1. Ponáranie dreveného trámu

Riešenie:

a) Na začiatku sila $\boldsymbol{F}_0$ napínajúca lano na jeho dolnom konci je v rovnováhe s tiažovou silou trámu $\boldsymbol{F}_g = m\,\boldsymbol{g}$. Po ponorení trámu o dĺžku $l < l_{max}$ sa sila $\boldsymbol{F}$ zmenší o vztlakovú silu $\boldsymbol{F}_v = -\rho\, S\, l\, \boldsymbol{g}$, tzn.

$$F = m\,g - \rho_v\, S\, l\, g \ . \qquad (1)$$

Ak dĺžka odvinutého lana $l > l_{max}$, trám sa začne nakláňať, obr. RC–1.



Obr. RC–1

Obr. RC–1 1 b

Označíme x dĺžku ponorenej časti trámu a α uhol sklonu trámu. Bod T_t v polovici dĺžky trámu je ťažisko trámu a pôsobisko tiažovej sily $\boldsymbol{F}_g$ s veľkosťou $F_g = m\,g$. Bod T_p v polovici dĺžky x je ťažisko ponorenej časti trámu a pôsobisko vztlakovej sily $\boldsymbol{F}_v$ s veľkosťou $F_v = \rho_v\, S\, x\, g$. Ťahová sila $\boldsymbol{F}$ lana pôsobí v koncovom bode Z trámu.

V rovnováhe platí pre sily

$$F_g - F_v - F = 0 \qquad (2) \qquad 0{,}5\text{ b}$$

a momenty síl, napr. k bodu Z,

$$F_g\,(L/2)\cos\alpha - F_v\,(L - x/2)\cos\alpha = 0. \qquad (3) \qquad 0{,}5\text{ b}$$

Po dosadení za veľkosti síl do vzťahu (3) a úprave dostávame

$$m\frac{L}{2} = \rho_v\, S\, x\left(L - \frac{x}{2}\right), \text{ resp. } x^2 - 2L\,x + \frac{m\,L}{\rho_v\, S} = 0\,.$$

Riešenie tejto kvadratickej rovnice je

$$x = L\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{m}{\rho_v\, S\, L}}\right),$$ (riešenie so znamienkom + nevyhovuje, lebo v tom prípade $x > L$).

1 b

Ako vidíme z výsledku, keď sa trám začne nakláňať, dĺžka x ponorenej časti je konštantná a nezávisí od uhlu α sklonu trámu. Hraničná poloha trámu zodpovedajúca hodnote $x = l_{max}$ je pre $\alpha = 90°$

$$l_{max} = x = L\left(1 - \sqrt{1 - \frac{m}{\rho_v\, S\, L}}\right). \qquad (4) \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $l_{max} \approx 4{,}38$ m. 1 b

Pre $x = l_{max}$ sú momenty síl v rovnováhe. Keby tyč zostávala v zvislej polohe, pri spúšťaní by sa ponárala hlbšie a vztlaková sila by narastala. Pri nepatrnom vychýlení by tak moment vztlakovej sily prevýšil moment tiažovej sily a trám by sa začal otáčať do rovnovážnej polohy.
Pre $l > l_{max}$ je preto zvislá poloha nestabilná.
Pre $l < l_{max}$ pri malom vychýlení trámu zo zvislého smeru je moment tiažovej sily väčší ako moment vztlakovej sily a trám sa otáča smerom nazad k zvislej polohe. Zvislá poloha je teda stabilná pre $l < l_{max}$. 1 b

b) Na začiatku, pre $l = 0$, visí trám na lane, a teda $F = F_0 = m\,g$. Pre dané hodnoty $F_0 \approx 844$ N.

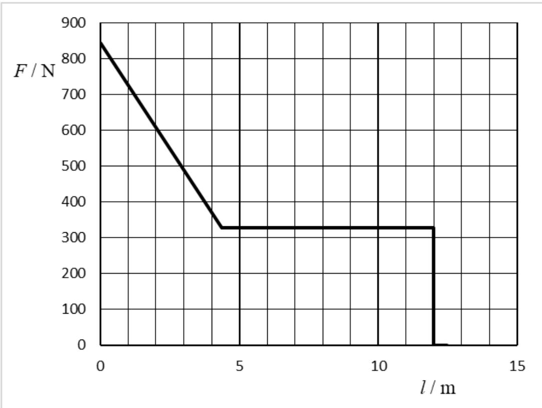
Keď sa trám ponára do vody a $l < l_{max}$, ťahová sila podľa (1) lineárne klesá s dĺžkou l

$F = F_0 - \rho_v S g l$. Pre dané hodnoty $F = (844 - 118\,\{l\})$ N. 1 b

Keď dĺžka $l \geq l_{max}$, je ťahová sila daná rovnicou (2)

$$F = F_1 = F_g - F_v = (m - \rho_v S x) g = F_0 - \rho_v g S\ L\left(1 - \sqrt{1 - \frac{m}{\rho_v S L}}\right).$$ 1 b

Pre dané hodnoty $F_1 \approx 328$ N.
Táto sila nezávisí od uhlu α a je preto konštantná až do položenia trámu do vodorovnej polohy na voľnú hladinu vody. Po dosiahnutí tejto polohy klesne ťahová sila na nulovú hodnotu a trám voľne pláva na hladine vody.
Graf funkcie $F(l)$ je na obr. RC–2.



Obr. RC–2 1 b

2. Supermesiac

Riešenie:

a) Pre pohyb družice po kružnici okolo centrálneho telesa – Zeme platí rovnica

$$m\omega^2 r = G\frac{mM_Z}{r^2}\text{, odkiaľ máme } T_D = 2\pi\sqrt{\frac{(R_Z+h)^3}{GM_Z}}\,. \qquad 2\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $T_D \approx 5{,}31\times10^3$ s $\approx 1{,}48$ h. 0,5 b

b) Mesiac vykoná jeden obeh okolo Zeme za čas T_{syn} – z pohľadu pozorovateľa na Zemi. Za tento čas sa sprievodič Zeme vzhľadom na Slnko otočí o uhol $\beta = \frac{2\pi}{T_Z}T_{syn}$. Aby sa na Zemi pozoroval Mesiac v rovnakej fáze, musí Mesiac prejsť uhol $2\pi + \beta$, čomu zodpovedá čas

$$T_{syn} = \frac{2\pi+\beta}{\omega_M} = T_M\left(1+\frac{T_{syn}}{T_Z}\right)\text{. Odtiaľ máme } T_M = T_{syn}\frac{T_Z}{T_Z+T_{syn}}\,. \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $T_M \approx 27{,}3$ d $\approx 2{,}36\times10^6$ s. 0,5 b

c) Pre dve rôzne trajektórie obehu telies okolo spoločného gravitačného centra platí rovnica (3. Keplerov zákon)

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3,$$ kde T_1, T_2 sú doby obehu, a_1, a_2 veľkosti hlavných polosí trajektórií.

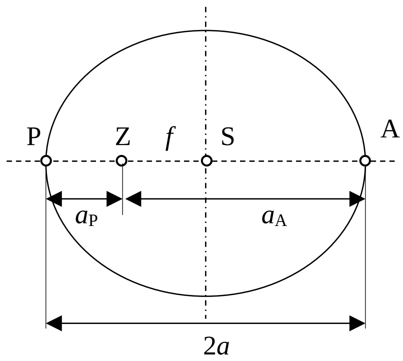
Pre Mesiac a družicu máme

$$\left(\frac{T_M}{T_D}\right)^2 = \left(\frac{a}{R+h}\right)^3\text{, odkiaľ máme } a = (R+h)\left(\frac{T_M}{T_D}\right)^{2/3}.$$

1 b

Pre dané hodnoty $a \approx 3{,}83\times10^8$ m. 0,5 b

Obr. RD–3 1 b



Obr. RC–3

d) Pri pozorovaní z povrchu Zeme je najmenšia vzdialenosť Mesiaca $d_{min} = a_P - R_Z$ a najväčšia $d_{max} = a_A - R_Z$. Uhol, pod ktorým je vidieť priemer Mesiaca z povrchu Zeme $\varphi = 2R_M/d$.

$$\text{Odtiaľ pomer } p = \frac{a_A - R_Z}{a_P - R_Z} = \frac{2a - a_P - R_Z}{a_P - R_Z}\text{, odkiaľ } a_P = \frac{2a + (p-1)R_Z}{p+1} \text{ a } a_A = 2a - a_P\,. \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $a_P \approx 3{,}62\times10^8$ m, $a_A \approx 4{,}04\times10^8$ m. 1 b

Excentricita je pomer vzdialenosti f ohniska od stredu elipsy a hlavnej polosi

$$e = \frac{f}{a} = \frac{a - a_P}{a}\,. \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $e \approx 0{,}055$. 0,5 b

3. Meranie teploty pomocou odporového (Wheatstonovho) mostíka

Riešenie:

a) Najprv určíme napätie U_{CD} medzi uzlami C a D samotného mostíka. Odpor mostíka medzi uzlami C, D

$$R_{\mathrm{CD}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} .$$

Prúd zdroja

$$I = \frac{U}{R_{\mathrm{v}} + R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{CD}}} .$$

Napätie medzi uzlami C, D

$$U_{\mathrm{CD}} = R_{\mathrm{CD}}\, I = U \frac{R_{\mathrm{CD}}}{R_{\mathrm{v}} + R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{CD}}} .$$

Prúd prechádzajúci vetvou R_1, R_2

$$I_1 = \frac{U_{\mathrm{CD}}}{R_1 + R_2}$$

a napätie

$$U_{\mathrm{AD}} = R_2\, I_1 = U \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{(R_{\mathrm{v}} + R_{\mathrm{A}})(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} . \qquad \text{2 b}$$

Analogicky určíme napätie

$$U_{\mathrm{BD}} = U \frac{R_4 (R_1 + R_2)}{(R_{\mathrm{v}} + R_{\mathrm{A}})(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} . \qquad \text{2 b}$$

b) Napätie U_{AB} medzi svorkami A, B

$$U_{\mathrm{AB}} = U_{\mathrm{AD}} - U_{BD} = U \frac{R_2 R_3 - R_4 R_1}{(R_{\mathrm{v}} + R_{\mathrm{A}})(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} .$$

Podmienka nulového napätia U_{AB}

$$R_2 R_3 = R_4 R_1 \qquad (1) \qquad \text{2 b}$$

predstavuje vyvážený mostík.

c) Odpor R_4 vyjadríme v tvare $R_4 = R_0 + R_0\, \alpha\, t$, pričom platí $R_2\, R_3 = R_0\, R_1$ pre teplotu t_0, a teda

$R_2 R_3 - R_4 R_1 = -R_0 R_1 \alpha t$ pre teplotu t.

Vyjadríme napätie

$$U_{\mathrm{AB}} = U \frac{-R_0 R_1}{(R_{\mathrm{v}} + R_{\mathrm{A}})(R_1 + R_2 + R_3 + R_0 + R_0 \alpha t) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_0 + R_0 \alpha t)} \alpha t .$$

Pre $\alpha\, t << 1$ zanedbáme $R_0\, \alpha\, t << R_0$ v menovateli. Potom máme

$$U_{\mathrm{AB}} = U \frac{-R_0 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)\left[R_2 (R_{\mathrm{v}} + R_{\mathrm{A}}) + R_0 (R_{\mathrm{v}} + R_{\mathrm{A}} + R_1 + R_2)\right]} \alpha t = -k\, t . \qquad \text{2 b}$$

Pre dané hodnoty $k \approx 4{,}69 \times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$. 1 b

Pre teplotu t_1 máme U_{AB1} = 188 mV. 1 b

4. Elektrické roztápanie ľadu

Riešenie:

a) Odpor drôtu

$$R = \rho_{\mathrm{R}} \frac{L}{S} = \rho_{\mathrm{R}} \frac{4L}{\pi d^2}.$$ Pre dané hodnoty $R \approx 107\ \Omega$. 2 b

b) Elektrický výkon

$$P = U\,I = \frac{U^2}{R} = \frac{\pi d^2 U^2}{4 \rho_{\mathrm{R}} L}.$$ Pre dané hodnoty $P \approx 495$ W. 3 b

c) Odporový drôt odovzdá za čas τ do okolia teplo $Q = P\,\tau$.

Teplo potrebné na roztopenie ľadu pri stálej teplote t_0

$$Q = m l_{\mathrm{t}} = \rho \pi \frac{D^2 - d^2}{4} L\, l_{\mathrm{t}}.$$ 2 b

Čas potrebný na roztopenie ľadu

$$\tau = \frac{m l_{\mathrm{t}}}{P} = \rho \pi \frac{D^2 - d^2}{4P} L\, l_{\mathrm{t}} = \frac{\rho_{\mathrm{R}}\, \rho\, l_{\mathrm{t}}\, L^2}{U^2} \left(\frac{D^2}{d^2} - 1 \right).$$ 2 b

Pre dané hodnoty $\tau \approx 66$ ks ≈ 18 h 20 min. 1 b

60. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie C*

Autori návrhov úloh: Ivo Čáp 1, 2, 3, Ľubomír Konrád 4

Recenzia a úprava úloh a riešení: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha

Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Anikó Hevesi

Redakcia: Ivo Čáp

Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019