

61. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2019/2020
kategória B – domáce kolo
Riešenie úloh

1. Dewarova nádoba

Riešenie:

- a) Vákuová medzera zabraňuje prenosu tepla vedením z nádoby s dusíkom do nádoby s héliom. Dochádza však k prenosu tepla žiarením medzi vnútorným a vonkajším povrchom vákuovej komory. Prenos tepla žiarením je priamoúmerný štvrtej mocnine teploty (podľa Stefanovho – Boltzmannovho zákona). Pri nízkej teplote vonkajšej steny vákuovej komory chladenej dusíkom sa významne zníži aj vyžarovanie tepla smerom k stene komory s héliom. 1 b

Hélium prijíma teplo z dusíka vyžarovaním cez vákuovú medzeru. Dusík s teplotou T_0 vyžaruje smerom k vnútornej nádobe s héliom výkon $P_0 = S_0 \sigma T_0^4$, zatiaľ čo nádoba s héliom vyžaruje naspäť výkon $P_1 = S_1 \sigma T_1^4$, kde $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ je Stefan–Boltzmannova konštanta, S_0 a S_1 sú plošné obsahy stien, z ktorých sa teplo vyžaruje. Ak uvážime, že pre obsahy povrchov platí $S_0 > S_1$ a navyše $(T_0/T_1)^4 > 10^5$, je tepelný prenos určený iba žiarením z dusíka do hélia. Prenos v opačnom smere je zanedbateľne malý, a teda malá zmena ΔT_1 teploty hélia sa neprejaví. 2 b

- b) Z grafu na obr. B–2 určíme pre teplotu $T_2 = 4,0 \text{ K}$ kvapalného hélia tlak jeho nasýtenej pary $p_2 \approx 83 \text{ kPa}$. 2 b

- c) Predpokladajme, že za jednotku času prijme hélium teplo Q_0 a to sa prejaví vyparením hélia s hmotnosťou m_2 , pričom platí

$$Q_0 = L m_2, \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

kde L je hmotnostné skupenské teplo vyparovania hélia pri teplote T_1 .

Tomu zodpovedá objem vypareného hélia podľa stavovej rovnice

$$V_2 = \frac{m_2}{M_m} \frac{RT_2}{p_2}. \quad (2)$$

Ak sa má vytvoriť k -krát viac pary, teda aj objem $V_3 = k V_2$, pri rovnakom prijatom teple Q_0 héliom, máme pre hmotnosť pary m_3 hélia

$$Q_0 = L m_3 = L \frac{p_3 V_3}{RT_3} M_m = L \frac{p_3 k V_2}{RT_3} M_m. \quad 1 \text{ b}$$

Ak dosadíme za Q_0 z (1) a (2), dostávame

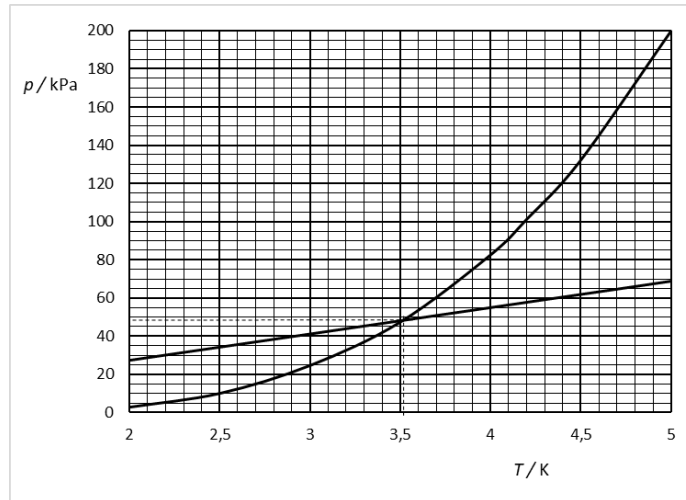
$$L m_2 = L \frac{p_3 k}{RT_3} M_m \frac{m_2}{M_m} \frac{RT_2}{p_2},$$

a odtiaľ

$$p_3 = \frac{p_2}{k} \frac{T_3}{T_2}, \quad 1 \text{ b}$$

čo je lineárna závislosť tlaku pár hélia od teploty.

Do grafu na obr. B–2 zostrojíme priamku $p(T) = (13,8 \frac{\text{kPa}}{\text{K}}) \times T$ a priesečník s krivkou nasýtenej pary zodpovedá tlaku p_3 a teplote T_3 , obr. RB–1. 1 b



Obr. RB-1

Hodnoty určené z grafu sú: $T_3 \approx 3,52$ K a $p_3 \approx 47,6$ kPa.

1 b

2. Kepler 452b

Riešenie:

- a) Podľa obr. B-2 určíme dĺžku F z rovnosti pre malý uhol ϑ ($\tan \vartheta \approx \vartheta$)

$$\frac{D}{2F} = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \text{ odkiaľ máme } F = \frac{D^2}{2,44 \lambda}.$$

Pre dané hodnoty $F \approx 12,3$ m.

1 b

Pre vzdialenosť do 12 m sa rozbiehavosť prakticky neprejaví.

- b) Dĺžka chodby $l > F$, zväzok sa už viditeľne rozbieha. Priemer stopy na konci chodby

$$D_2 = 2l \vartheta = 2,44l \frac{\lambda_1}{D_1}. \text{ Pre dané hodnoty } D_2 \approx 1,62 \text{ cm.}$$

Ak by sa laser zameral na Mesiac, bol by vo vzdialenosti Mesiaca od Zeme priemer stopy

$$D_3 = 2d_{ZM} 1,22 \frac{\lambda_1}{D_1}. \quad (2) \quad 2 \text{ b}$$

Pre vzdialenosť Zem – Mesiac $d_{ZM} = 380$ tis. km dostávame $D_3 \approx 123$ km.

2 b

- c) Priemer osvetlenej oblasti na Mesiaci pre apertúru $D_1' = 2,0$ m podľa (2) $D_4 \approx 247$ m. 1 b

- d) Minimálny uhol rozlíšenia je daný vzťahom (1) v zadaní úlohy.

Pre dané hodnoty veličín $\vartheta_{\min} = 2,29 \times 10^{-7}$ rad $\approx 1,31 \times 10^{-5}$ stupňa $\approx 0,047''$, čo zodpovedá hodnote udávanej NASA.

1 b

- e) Aby bolo možné rozlíšiť oba objekty musí byť ich uhlová vzdialenosť $\vartheta > \vartheta_{\min}$.

Vzdialenosť planéty od hviezdy $d \approx d_{ZS}$ a vzdialenosť hviezdy od Zeme

$$d_L = 1\,400 \text{ ly} = (1\,400 \times 365,25 \times 24 \times 3600) \text{ s} \times 3,00 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 1,33 \times 10^{19} \text{ m,}$$

$$\vartheta = \frac{d_{ZS}}{d_L} \approx 1,13 \times 10^{-8} \text{ rad.}$$

Ak uvažujeme pozorovanie vo svetle s vlnovou dĺžkou $\lambda = 360 \text{ nm}$, je rozlišovacia schopnosť

$$g_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D_6} = \frac{d_{zs}}{d_L}, \text{ odkiaľ máme}$$

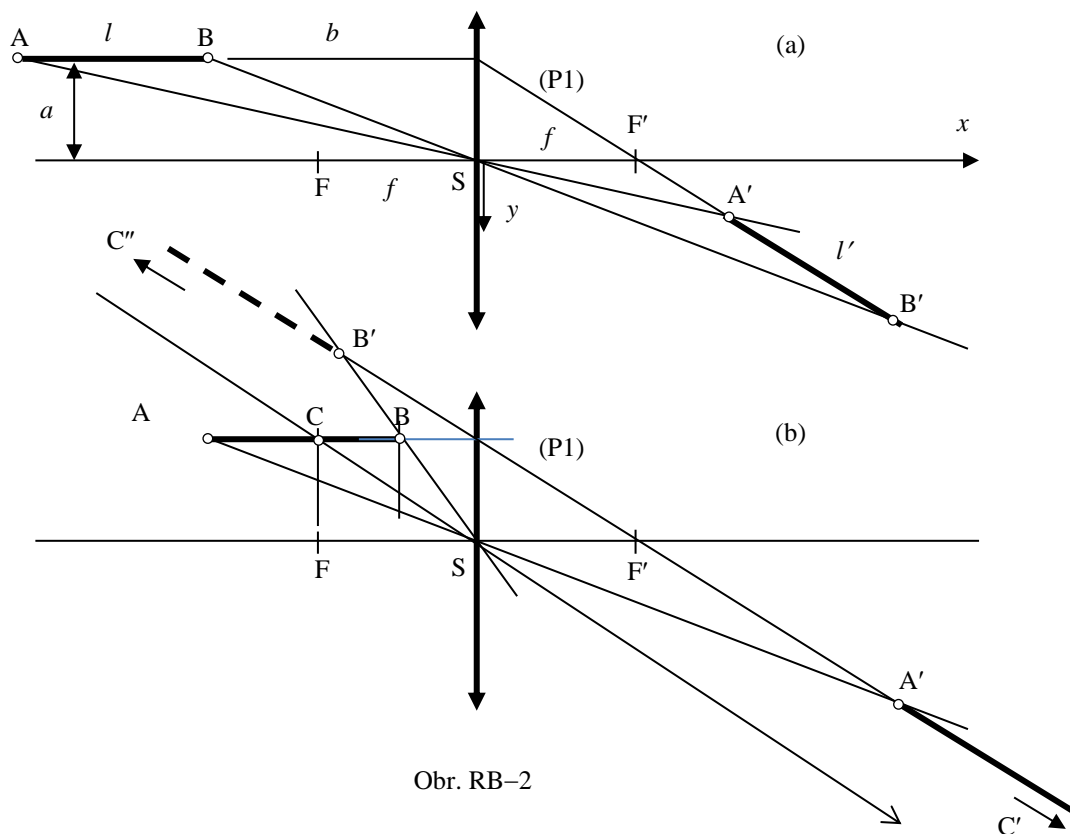
$$D_6 > 1,22 \frac{\lambda}{d_{zs}} d_L. \text{ Pre dané hodnoty } D_6 > 38,9 \text{ m.} \quad 2 \text{ b}$$

Ďalekohľad s takým obrovským primárnym zrkadlom $D = 39 \text{ m}$ sa buduje v Európe a bude umiestnený na náhornej plošine v Andách v Čile. Teleskop E-ELT (European Extra Large Telescope) bude uvedený do prevádzky v roku 2024. V súčasnosti najväčší teleskop má priemer zrkadla 500 m a nachádza sa v Číne. 1 b

3. Obraz tyčky

Riešenie:

a) Obr. RB-2 a, b. 2 b + 2 b



Obr. RB-2

Na hornom obrázku je konštrukcia obrazu pre $b > f$. Body predmetu AB na rovnobežke s osou sa zobrazia na priamku (1) prechádzajúcou obrazovým ohniskom F' . Obraz celej tyče $A'B'$ je reálny. V dolnom obrázku je situácia pre $b < f$. Tyč rozdelíme na dve časti. Body časti AC vytvárajú reálny obraz $A'C'$, pričom obraz C' je v nekonečne. Obraz úseku AC je polpriamka $A'C'$. Body časti CB vytvárajú zdanlivý obraz $B'C''$, pričom obraz C'' je v nekonečne. Ide teda o polpriamku $B'C''$.

1 b

b) Ide o prípad $b > f$.

Určíme súradnice bodov A' a B'. Podľa obrázku obr. RB-2a platia vzťahy

$$\frac{y'_A}{x'_A} = \frac{a}{b+l} \quad \text{a} \quad \frac{a}{f} = \frac{y'_A}{x'_A - f}.$$

Odtiaľ dostávame

$$y'_A = \frac{af}{b+l-f} \quad \text{a} \quad x'_A = \frac{f(b+l)}{b+l-f}. \quad (1)$$

Rovnako postupujeme pri určení súradníc bodu B'. Iba namiesto $b+l$ použijeme b .

$$y'_B = \frac{af}{b-f} \quad \text{a} \quad x'_B = \frac{fb}{b-f}. \quad (2)$$

Dĺžka obrazu tyče

$$l_2 = \sqrt{(x'_A - x'_B)^2 + (y_A - y'_B)^2}. \quad (3)$$

Po dosadení veličín (1 a (2) do výrazu (3) a úprave máme

$$l_2 = \frac{f\sqrt{f^2 + a^2}}{(b+l_1-f)(b-f)} l_1. \quad 2 \text{ b}$$

Zo vzťahu vidíme, že s rastom b sa dĺžka l_2 obrazu znižuje k nule. Naopak, ak sa b blíži k f , dĺžka l_2 rastie k nekonečnu.

Obraz tyče leží na priamke (P1) v obr. RB-2 a s osou x zvierá uhol

$$\alpha = \arctan \frac{a}{f}. \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $l_2 \approx 61 \text{ mm}$, $\alpha \approx 9,5^\circ$. 2 × 0,5 b

4. Nabité guľôčky

Riešenie:

- a) Na druhú guľôčku pôsobia elektrická príťažlivá sila zvislo hore a gravitačná sila zvislo dolu.

Aby spodná guľôčka sa zdvihla nad podložku, musí na ňu pôsobiť elektrická sila väčšia ako gravitačná sila

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} > mg, \quad (1)$$

kde l je najmenšia vzdialenosť medzi guľôčkami po uvoľnení hornej guľôčky. 2 b

- b) Podľa zákona zachovania energie platí

$$-\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 h} + mgh = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l} + mgl + \frac{1}{2}k(h-l)^2 \quad (2) \quad 2 \text{ b}$$

Z (2) a hraničnej podmienky podľa (1)

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} = mg \quad (3)$$

dostávame kvadratickú rovnicu pre hraničnú dĺžku l

$$l^2 - 2\frac{kh^2}{kh+2mg}l + \left(\frac{kh-2mg}{kh+2mg}\right)h^2 = 0 \quad 2 \text{ b}$$

s riešením

$$l_{1,2} = \frac{kh \pm 2mg}{kh + 2mg} h.$$

Podmienke najmenšieho náboja zodpovedá znamienko mínus, tzn.

$$l = \frac{kh - 2mg}{kh + 2mg} h. \quad 2 \text{ b}$$

Z rovnice (3) potom dostávame

$$Q_{\min} = 2\sqrt{\pi \varepsilon_0 mg} \frac{kh - 2mg}{kh + 2mg} h.$$

Pre dané hodnoty $Q_{\min} \approx 1,0 \mu\text{C}$. 2 b

5. Gulôčka vo valci

Riešenie:

- a) Po uvoľnení sa gulôčka začne šmýkať nadol, pričom sa účinkom sily trenia roztáča. Po prechode rovnovážnou polohou pokračuje stúpaním na opačnú stenu. Keďže sa časť energie premení na teplo počas prešmykovania, je výsledná výchylka menšia ako začiatočná. Pohyb pokračuje podobne naspäť. To sa opakuje, až kým maximálna výchylka nedosiahne hodnotu α_m , pri ktorej sa už gulôčka nebude prešmykovať – pohybuje sa valivým pohybom. Keďže pri valivom pohybe nedochádza ku stratám energie, bude gulôčka kmitať okolo rovnovážnej polohy valivým pohybom. Ak bude amplitúda uhlovej výchylky $\alpha_m \ll 1$ rad, možno kmity považovať za harmonické. 4 b
- b) Určíme podmienku neprešmykovania gulôčky na šikmej ploche.

Na guľu pôsobia tri sily: F_g – tiažová sila, F_N – tlaková sila podložky, F_T – sila trenia. Tiažovú silu F_g rozložíme na zložku F_t rovnobežnú s podložkou a F_n kolmú na podložku. Keďže pohyb sa uskutočňuje po zakrivenej ploche, prejaví sa pri pohybe zotrvačná odstredivá sila F_o .

Počas pohybu v smere dotyčnice k podložke je výslednica síl kolmých na podložku nulová

$$F_N = F_n + F_o.$$

Pohybová rovnica pohybu ťažiska

$$ma = F_t - F_T$$

a pre otáčanie gulôčky vzhľadom na os prechádzajúcu bodom dotyku O platí

$$J \varepsilon = r F_t,$$

kde $J = J_0 + m r^2$ je moment zotrvačnosti guľe vzhľadom na os prechádzajúcu bodom O.

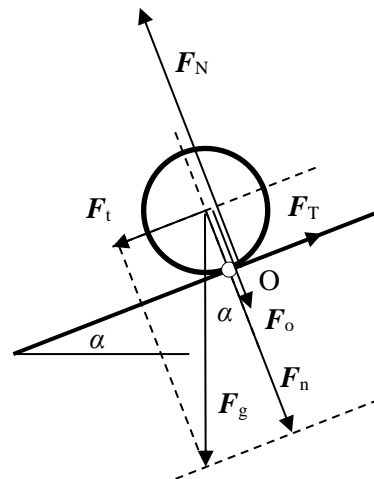
V krajnej polohe (zastavenie gulôčky) je $F_o = 0$, a teda $F_N = F_g \cos \alpha$.

Rovnica postupného pohybu gulôčky

$$ma = F_g \sin \alpha - F_T$$

a rotačného pohybu

$$J \varepsilon = r F_g \sin \alpha.$$



Obr. RB-3

Ak sa nemá guľôčka prešmykovať, trenie je statické $F_T \leq f F_N$ a pohyb valivý $a = r \varepsilon$. Po dosadení do pohybových rovníc a úprave dostávame podmienku pre medzný uhol

$$F_T = \frac{2}{7} m g \sin \alpha \leq f m g \cos \alpha, \text{ resp. } \tan \alpha \leq \frac{7}{2} f = \tan \alpha_{\max}.$$

Medzný uhol $\alpha_{\max} \approx 19^\circ$.

3 b

Ak sa guľôčka zastaví pri uhle $\alpha_m \leq \alpha_{\max}$, pokračuje naspäť valivým pohybom bez strát, a jej pohyb bude ustálený kmitavý pohyb.

1 b

- c) Pri valivom pohybe sa zachováva mechanická energia. Pri výchylke α z rovnovážnej polohy je potenciálna energia guľôčky

$$E_p = m g h = m g (R - r) (1 - \cos \alpha),$$

pre malé uhly $\alpha \ll 1$ rad

$$E_p = \frac{1}{2} m g (R - r) \alpha^2 = \frac{1}{2} k \alpha^2.$$

Kinetická energia guľôčky

$$E_k = E_{tr} + E_{rot},$$

kde

$$E_{tr} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\alpha}^2$$

$$a \quad E_{rot} = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} J_0 \left[\frac{(R - r) \dot{\alpha}}{r} \right]^2.$$

Kinetická energia je priamoúmerná druhej mocnine časovej derivácie výchylky α

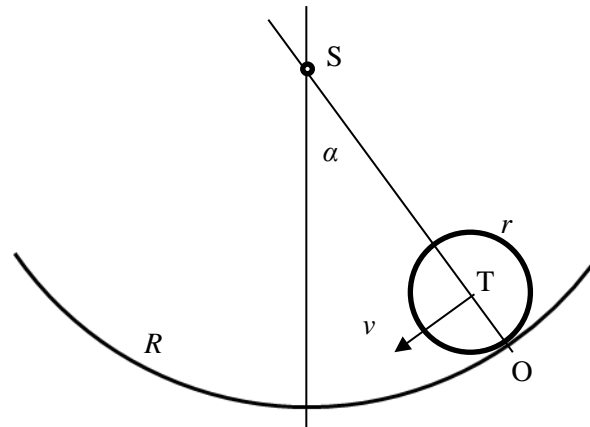
$$E_k = \frac{1}{2} \frac{7}{5} m (R - r)^2 \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} J^* \dot{\alpha}^2.$$

Periódka kmitavého pohybu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J^*}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{7}{5} \frac{(R - r)}{g}}. \text{ Pre dané hodnoty } T \approx 0,73 \text{ s.}$$

2 b

Je možné aj iné riešenie pomocou pohybovej rovnice guľôčky – s rovnakým výsledkom.



Obr. RB-4

6. Elektromagnetická brzda

Riešenie:

- a) V cievke sa indukuje elektrické napätie $U = \frac{d\Phi}{dt}$, kde magnetický indukčný tok

$$\Phi = N B S \cos \alpha = N B S \cos \omega_0 t,$$

kde α je uhol medzi magnetickou indukciou \mathbf{B} a normálou k ploche cievky.

Keďže ide o uzatvorený elektrický obvod, je prúd v obvode

$$I = \frac{U}{R + R_z} = - \frac{N B S \omega_0}{R + R_z} \sin \omega t.$$

Amplitúda prúdu $I_m = \frac{NBS\omega_0}{R+R_z}$. Pre dané hodnoty $I_m \approx 201$ A. 2 b

b) Tepelný výkon v čase t

$$P(t) = (R_z + R) I^2 = \frac{(NBS\omega)^2}{R+R_z} \sin^2 \omega t = \frac{(NBS\omega)^2}{R+R_z} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}.$$

Keďže stredná hodnota harmonickej funkcie (za jednu periódu) je nulová, je stredná hodnota výkonu

$$P = \frac{1}{2} \frac{(NBS\omega)^2}{R+R_z}.$$

Pri uhlovej rýchlosti ω_0 je $P \approx 505$ kW. 3 b

c) Výkon momentu sily $P = M \omega$. Začiatkový moment sily je potom

$$M_0 = -\frac{(NBS)^2}{2(R+R_z)} \omega_0.$$

Pre dané hodnoty $M_0 \approx -161$ N·m. 2 b

d) Uhlová rýchlosť je definovaná $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, odkiaľ máme $d\varphi = \omega dt$. V dôsledku pôsobenia

brzdiaceho momentu sily sa mení moment hybnosti rotora podľa pohybovej rovnice

$$\frac{dL}{dt} = M, \text{ kde } L = J\omega \text{ je moment hybnosti. Integrujeme rovnicu } dL = M dt$$

$$\int_{L_0}^0 dL = 0 - L_0 = \int_0^\infty M dt = -\int_0^\infty \frac{(NBS)^2}{2(R+R_z)} \omega dt = -\frac{(NBS)^2}{2(R+R_z)} \int_0^\varphi d\varphi = -\frac{(NBS)^2}{2(R+R_z)} \varphi.$$

Počet otáčok do zastavenia

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{J(R+R_z)\omega_0}{\pi(NBS)^2}. \text{ Pre dané hodnoty } n \approx 2,44 \times 10^4. \quad \text{3 b}$$

7. Meranie intenzity osvetlenia – experimentálna úloha

Bodovanie úloh 1 až 4: 2 b + 4 b + 4 b + 2 b

61. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie B

Autori návrhov úloh:

Lubomír Konrád (1, 3, 4), Aba Teleki (2), Boris Lacsny (2)
Ivo Čáp (5, 6, 7)

Recenzia a úprava úloh a riešení:

Daniel Klivanec, Lubomír Mucha

Preklad textu úloh do maďarského jazyka:

Aba Teleki

Redakcia:

Ivo Čáp

Vydal:

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020