

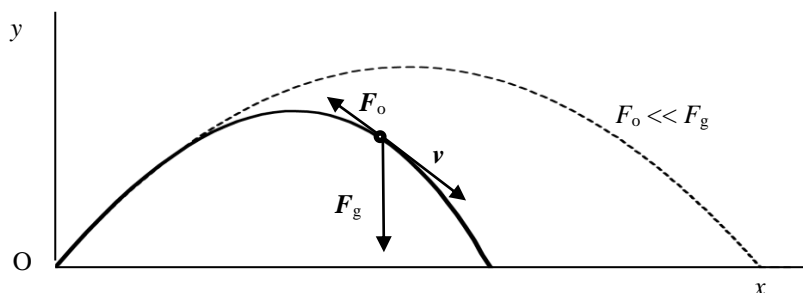
62. ročník Fyzikálnej olympiády
 v školskom roku 2020/2021
 kategória A – domáce kolo
 Riešenie úloh

1. Šikmý vrh

Riešenie:

a) Obr. RA-1

0,5 b



Obr. RA-1 Šikmý vrh

Na teleso pôsobí konštantná tiažová sila $F_g = m g$, ktorá má zvislý smer. Počas pohybu na teleso pôsobí sila aerodynamického odporu $F_o = \frac{1}{2} \rho_v C S_{\perp} v^2 (-v^0)$, kde C je koeficient odporu prostredia. Odporová sila je priamoúmerná druhej mocnine rýchlosti v , hustote prostredia ρ_v a kolmému priemetu S_{\perp} telesa do roviny kolmej na smer pohybu. Má vždy smer opačný ako vektor rýchlosti (v^0 je jednotkový vektor v smere pohybu). sily: 0,5 b

Vplyv odporu prostredia možno posudzovať pomerom síl

$$\frac{F_o}{F_g} = \frac{\rho_v C S_{\perp}}{2 m g} v^2, \text{ pre homogénne teleso } \frac{F_o}{F_g} = \frac{1}{2} \frac{\rho_v S_{\perp} C}{\rho_t V g} v^2.$$

Napr. pre guľu máme $S_{\perp}/V = [\pi R^2/(4/3) \pi R^3] = (3/4R)$. Pre hladkú guľu $C \approx 0,1$.

Pre kameň tvaru gule s priemerom $d = 40$ mm, $\rho_v \approx 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_t = 2,6\cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a rýchlosť $v = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dostávame pomer $F_o/F_g \approx 1,9\cdot 10^{-2}$.

za jeden z príkladov: 0,5 b

Pre stolnotenisovú loptičku s hmotnosťou $m = 2,7$ g a priemerom $d = 40$ mm, ktorá sa pohybuje rýchlosťou $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pomer $F_o/F_g \approx 1,2$.

Pre olovený náboj s hustotou $\rho_t = 11,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, pre zjednodušené tvaru gule s priemerom 5 mm a rýchlosťou $100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, dostávame pomer $F_o/F_g \approx 1,8$.

Z príkladov vidíme, že pri vrhaní veľkých homogénnych tuhých telies s rýchlosťami desiatok m/s je vplyv odporovej sily veľmi malý a dá sa preto zanedbať. Pri pohybe malých tuhých teliesok ale s veľkou rýchlosťou je vplyv odporovej sily podstatný. Podobne je to pri pohybe ľahkých (dutých) telies malými rýchlosťami tiež nemožno vplyv odporu vzduchu zanedbať.

Ak možno zanedbať vplyv odporovej sily, na teleso pôsobí iba konštantná tiažová sila v zvislom smere, preto pohyb vo vodorovnom smere je rovnomerný (s konštantnou rýchlosťou) a v zvislom smere je zrýchlenie rovnaké v smere nahor aj v smere nadol. Trajektória, ktorá je superpozíciou oboch zložiek pohybu, je symetrická okolo zvislej osi prechádzajúcej jej najvyšším bodom.

0,5 b

Ak sa vplyv odporu vzduchu nedá zanedbať, je tvar vzostupnej časti trajektórie iný ako tvar časti zostupnej, preto trajektória nie je symetrická podľa zvislej osi.

- b) Pohybová rovnica má tvar $ma = mg$, resp. $a_x = 0$ a $a_y = -g$, kde x je vodorovná os a y zvislá. 0,5 b

Ak predpokladáme súradnice vrhu $x_0 = y_0 = 0$ a začiatočnú rýchlosť $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$ a $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$, dostávame pre zložky rýchlosti pohybu

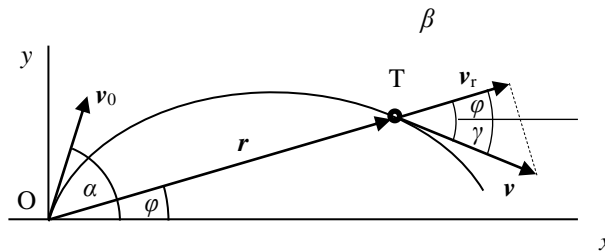
$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad \text{a} \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt \quad \text{0,5 b}$$

a pre súradnice telesa

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad \text{a} \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad \text{0,5 b}$$

- c) Vzďialenosť telesa od začiatočnej polohy (dĺžka polohového vektora)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v_0 t \cos \alpha)^2 + \left(v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2\right)^2} = \frac{gt}{2} \sqrt{t^2 - 4 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} t + \frac{4v_0^2}{g^2}}. \quad \text{0,5 b}$$



Obr. RA-2

Rýchlosť v telesa

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} = g \sqrt{t^2 - 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} t + \frac{v_0^2}{g^2}}. \quad (1)$$

Radiálnu rýchlosť (časová zmena vzdialenosti r) možno určiť dvoma spôsobmi. Priamy a jednoduchý spôsob je určenie radiálnej rýchlosti pomocou časovej derivácie vzdialenosti r

$$v_r = \frac{dr}{dt} = g \frac{t^2 - 3 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} t + \frac{2v_0^2}{g^2}}{\sqrt{t^2 - 4 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} t + \frac{4v_0^2}{g^2}}}. \quad (2) \quad \text{1 b}$$

Výraz pod odmocninou musí byť nezáporný, ale to je splnené, keďže tento výraz je vo vzťahu pre r , pričom $r \geq 0$ pre ľubovoľný čas pohybu $0 \leq t < \infty$.

Radiálnu zložku vyjadríme (podľa obr. RA-2)

$$v_r = v \cos \beta, \quad (3)$$

odkiaľ máme pre uhol β vzťah

$$\beta = \arccos \frac{v_r}{v} = \arccos \left\{ \frac{t^2 - 3 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} t + \frac{2v_0^2}{g^2}}{\sqrt{\left(t^2 - 4 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} t + \frac{4v_0^2}{g^2} \right) \left(t^2 - 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} t + \frac{v_0^2}{g^2} \right)}} \right\}. \quad (4) \quad 1 \text{ b}$$

Druhá možnosť je určiť radiálnu zložku v_r rýchlosti v , a uhol β podľa obr. RA-2. Uhol medzi vektormi \mathbf{r} a \mathbf{v} je $\beta = \varphi - \gamma$ (pozn.: za vrcholom je $\gamma < 0$, a teda v súčte použijeme $-\gamma$). Radiálna zložka

Určíme uhly φ a γ

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} = \frac{v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2}{v_0 t \cos \alpha} \quad (5)$$

$$\text{a} \quad \tan \gamma = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha - g t}{v_0 \cos \alpha}. \quad (6)$$

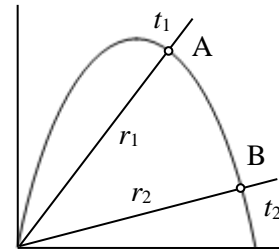
Kosínus uhlu β je

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos(\varphi - \gamma) = \cos \varphi \cos \gamma + \sin \varphi \sin \gamma = \cos \varphi \cos \gamma (1 + \tan \varphi \tan \gamma) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \gamma}} (1 + \tan \varphi \tan \gamma). \end{aligned} \quad (7)$$

Po dosadení (5), (6) do (7) a úprave dostávame rovnaký vzťah ako (4). S použitím (7) a (1) dostávame vzťah pre radiálnu rýchlosť (2).

Pozn.: 2 body za v_r a β pre ktorýkoľvek z postupov.

- d) Ak sa má teleso od začiatku O vzdalovať, musí byť radiálna rýchlosť kladná. v stúpajúcej časti vrhu je podmienka splnená a tesne pred dopadom tiež (a prípadne i po ňom, ak by sa teleso mohlo pohybovať pod úroveň roviny vrhu). Kritický je preto čas medzi dosiahnutím najvyššieho bodu trajektórie a dopadom. Keďže menovateľ vzťahu (2) je kladný pre $t > 0$, a teda riešenie existuje, čitateľ vo vzťahu (2) musí byť kladný



Obr. RA-2a

$$t^2 - \left(\frac{3v_0}{g} \sin \alpha \right) t + 2 \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 > 0.$$

Korene kvadratického vzťahu na ľavej strane

$$t_{1,2} = \left(\frac{3v_0}{2g} \sin \alpha \right) \pm \sqrt{\left(\frac{3v_0}{2g} \sin \alpha \right)^2 - 2 \left(\frac{v_0}{g} \right)^2},$$

a teda $(t - t_1)(t - t_2) > 0$, tzn. v intervale času $t_1 < t < t_2$ je výraz záporný. Situácia je znázornená na obr. RA-2a. Pri veľkom uhle α existujú body A a B (vektor \mathbf{r} je kolmý na dotyčnicu k trajektórii), medzi ktorými vzdialenosť klesá od najväčšej v bode A do najmenej v bode B.

Aby tento stav nenastal, nesmie existovať reálne riešenie kvadratického výrazu, tzn. diskriminant je záporný

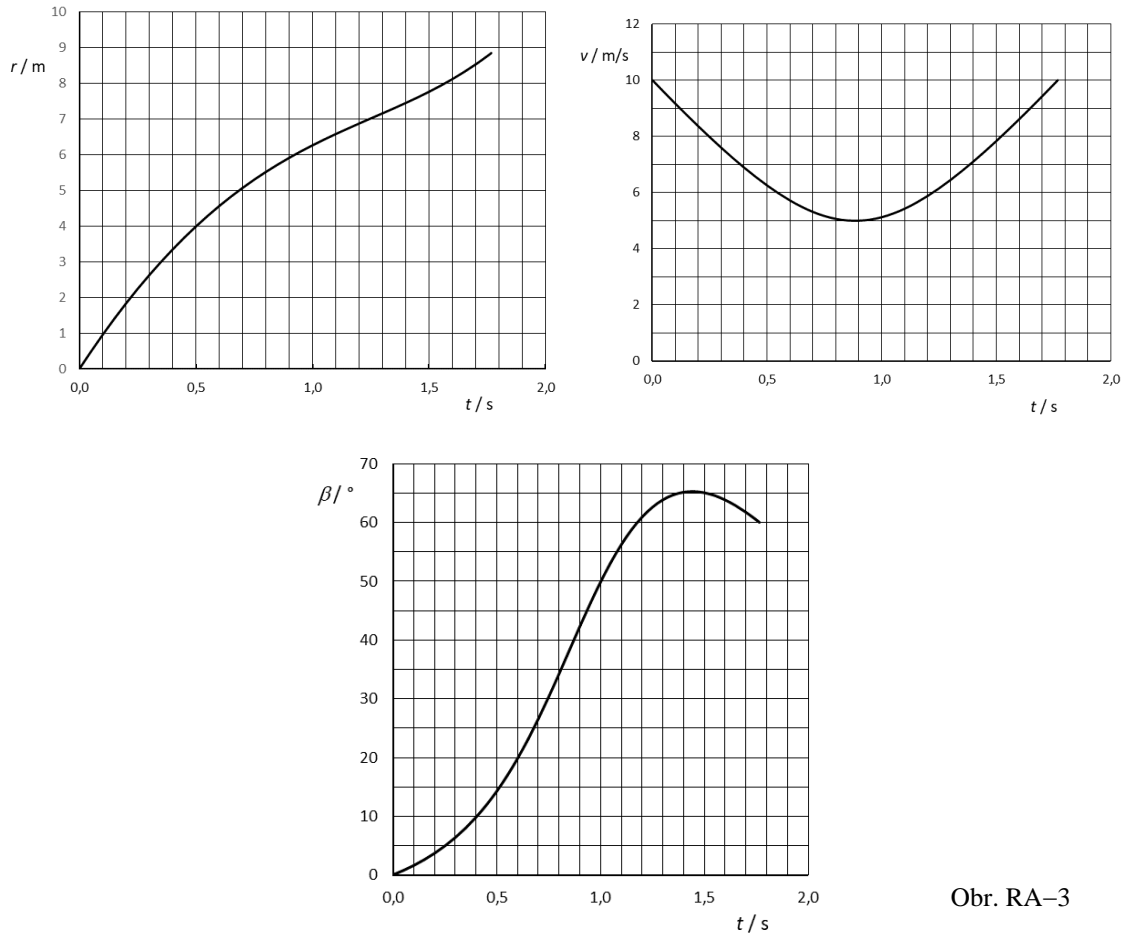
$$\left(\frac{3v_0}{2g} \sin \alpha \right)^2 - 2 \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 < 0,$$

Odtiaľ máme $\sin \alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$, a teda $\alpha < 70,5^\circ$.

2 b

Z výsledku je zrejmé, že prípad podľa časti d) tejto podmienke vyhovuje, čo vidíme aj z grafu funkcie $r(t)$ na obr. RA-3.

e) Grafy od okamihu vrhu do okamihu dopadu na vodorovnú plochu



Obr. RA-3

za každý graf 0,5 b – spolu 1,5 b

Z grafov môžeme zistiť: doba letu $t_d \approx 1,8$ s; dolet vo vodorovnom smere $x_d = r_{\max} \approx 8,8$ m; rýchlosť vrhu je rovná rýchlosti dopadu, minimálna rýchlosť v najvyššom bode $v_{\min} \approx 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; vzdialenosť r sa zväčšuje počas celého pohybu (v grafe r a v grafe β uhol $\beta < 70,5^\circ$). 0,5 b

2. Chladenie čaju

Riešenie:

- a) V prvom prípade nalejeme chladiacu vodu do nerezovej nádoby a tú ponoríme do čaju. Dochádza k tepelnej výmene a ustálení teploty t_3 kvapalín. Pre teplo odovzdané čajom a teplo prijaté vodou platí $mc(t_1 - t_3) = mc(t_3 - t_2)$.

Výsledná teplota čaju a vody je rovnaká $t_3 = \frac{t_1 + t_2}{2}$.

Pre dané hodnoty $t_3 = 50$ °C.

2 b

- b) Najprv nalejeme do nerezovej nádoby prvú dávku studenej vody s hmotnosťou m_1 a nádobu vložíme do čaju. Po ustálení teplôt čaju a vody použijeme druhú časť studenej vody s hmotnosťou m_2 . Po ustálení teplôt vody a čaju nalejeme vodu do druhej nádoby. Určíme teploty t_{42} čaju a t_{52} vody po ukončení chladenia.

Pre prvé chladenie máme $mc(t_1 - t'_4) = m_1 c(t'_4 - t_2)$.

Po ustálení teploty oboch kvapalín t'_4 vložíme do čaju druhú nádobu so studenou vodou s teplotou t_2 . Pre tepelnú výmenu a ustálení teploty čaju na výslednej hodnote t_{42} platí

$$mc(t'_4 - t_{42}) = m_2 c(t_{42} - t_2).$$

Rovnice upravíme na tvar $t'_4 - t_2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{m_1}{m}\right)}(t_1 - t_2)$

$$t_{42} - t_2 = \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m}}(t'_4 - t_2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{m_2}{m}\right)\left(1 + \frac{m_1}{m}\right)}(t_1 - t_2). \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

Najmenšia hodnota t_{42} zodpovedá maximálnej hodnote menovateľa pravej strany

$$y = \left(1 + \frac{m_2}{m}\right)\left(1 + \frac{m_1}{m}\right) = \left(2 - \frac{m_1}{m}\right)\left(1 + \frac{m_1}{m}\right) = (2 - x)(1 + x) - \max.$$

$$y = (2 - x)(1 + x) = -(x^2 - x - 2) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 + \frac{1}{4}.$$

Maximum tohto kvadratického výrazu zodpovedá $x = \frac{1}{2}$.

Maximum môžeme vypočítať aj z nulovej hodnoty derivácie.

V oboch prípadoch pre maximum funkcie y dostaneme $x = \frac{m_1}{m} = \frac{1}{2}$, tzn. $m_1 = m_2$ (2) 0,5 b

V tomto prípade máme z (1) a (2) $t_{42} = t_2 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)}(t_1 - t_2) = t_2 + \frac{4}{9}(t_1 - t_2)$.

Porovnáme výsledné teploty čaju a chladiacej vody $t_{42} - t_3 = -\frac{1}{18}(t_1 - t_2)$.

Výsledná teplota t_{42} pri dvojstupňovom chladení je nižšia o $\Delta t_4 \approx 4,4$ °C ako teplota t_3 pri jednostupňovom chladení.

1 b

Teplo odobrané čajom sa rovná teplu prijatému chladiacou vodou

$$m_1 c(t_1 - t_{42}) = m_2 c(t_{52} - t_2),$$

odkiaľ máme

$$t_{52} = t_1 + t_2 - t_{42} = t_1 + t_2 - \left[t_2 + \frac{4}{9}(t_1 - t_2) \right] = t_1 - \frac{4}{9}(t_1 - t_2).$$

Rozdiel výsledných teplôt čaju a chladiacej vody

$$t_{42} - t_{52} = -\frac{1}{9}(t_1 - t_2) \approx -8,9 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad 1 \text{ b}$$

- c) Uvažujme rozdelenie studenej vody na n rovnakých dávok. Prebehne tak n opakovaných chladení. Pre jednotlivé chladenía máme

$$mc(t_1 - t_4^{(1)}) = \frac{m}{n}c(t_4^{(1)} - t_2), \quad \text{odkiaľ } t_4^{(1)} - t_2 = \frac{n}{n+1}(t_1 - t_2)$$

$$mc(t_4^{(1)} - t_4^{(2)}) = \frac{m}{n}c(t_4^{(2)} - t_2), \quad \text{odkiaľ } t_4^{(2)} - t_2 = \frac{n}{n+1}(t_4^{(1)} - t_2)$$

...

$$mc(t_4^{(n-1)} - t_4^{(n)}) = \frac{m}{n}c(t_4^{(n)} - t_2), \quad \text{odkiaľ } t_4^{(n)} - t_2 = \frac{n}{n+1}(t_4^{(n-1)} - t_2).$$

Ak do posledného vzťahu pre $t_4^{(n)}$ dosadíme výsledné teploty z predchádzajúcich chladení, dostaneme vzťah pre výslednú teplotu po n chladeníach

$$t_4^{(n)} = t_2 + \left(\frac{n}{n+1} \right)^n (t_1 - t_2). \quad 2 \text{ b}$$

Priamym dosadením (tab. nižšie) sa môžeme presvedčiť, že postupnosť $z_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$ s narastajúcim n klesá.

| | | | | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| n | 1 | 2 | 3 | 10 | 20 | 50 | 100 | 1000 | ∞ |
| z_n | 0,50 | 0,44 | 0,42 | 0,39 | 0,38 | 0,37 | 0,37 | 0,37 | 0,368 |

Samozrejme delenie na veľké hodnoty n je iba teoretické, ale vidíme, i pre prijateľné hodnoty okolo $n = 10$ sa výsledok blíži limitnej teoretickej hodnote $t_{4 \text{ min}} \approx 39,4 \text{ } ^\circ\text{C}$, čo je približne o $10 \text{ } ^\circ\text{C}$ menej ako t_3 pri jednostupňovom chladení. 1 b

- d) Z rovnosti tepla odobraného čaju a odovzdaného chladiacej vode máme

$$mc(t_1 - t_4^{(n)}) = mc(t_5^{(n)} - t_2), \text{ odkiaľ dostávame}$$

$$t_5^{(n)} = t_1 + t_2 - t_4^{(n)} = t_1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^n (t_1 - t_2).$$

Pre veľké n sa výsledná teplota blíži hodnote

$$t_{5 \text{ max}} = t_1 - \frac{1}{e}(t_1 - t_2). \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $t_{5 \text{ max}} \approx 60,6 \text{ } ^\circ\text{C}$.

0,5 b

Studená voda sa pri procese viac-stupňového chladenía zohreje na teplotu až o $21 \text{ } ^\circ\text{C}$ vyššiu ako je teplota ochladeného čaju.

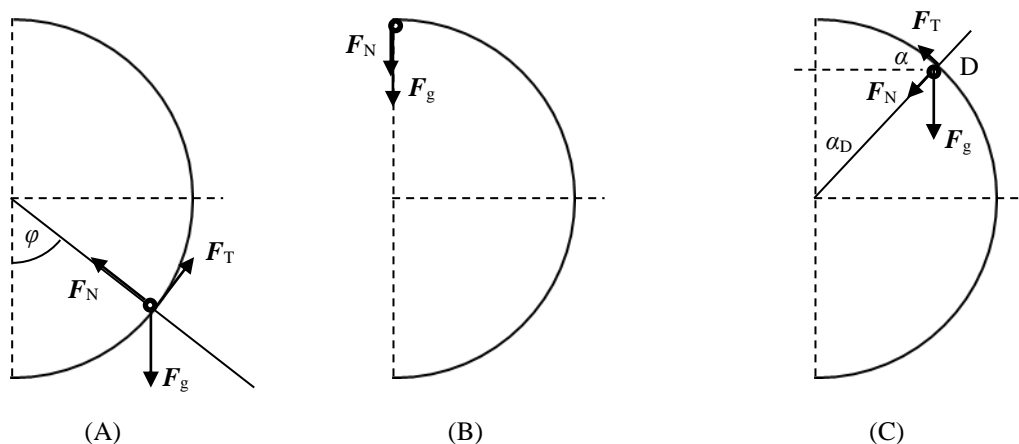
3. Gulôčka na valcovej stene

Riešenie:

- a) (A) Pre malé hodnoty v_0 sa gulôčka zastaví niekde v úseku AB steny a začne sa kotúľať nazad. Celý čas je v kontakte so stenou.
- (B) Pre dostatočne veľké rýchlosti v_0 prejde až do bodu C steny a pokračuje z výšky $2R$ vodorovným vrhom na podložku.
- (C) Pre väčšie rýchlosti gulôčka prekročí bod B a pokračuje na oblúku BC až kým nestratí kontakt so stenou. Od tohto bodu pokračuje šikmým vrhom a dopadne na podložku alebo na časť AB steny.

Slovný komentár: 1 b

Obr. RA-4 (A), (B), (C): 1 b



Obr. RA-4

Podľa obr. RA-4:

(A) V inerciálnej vzťažnej sústave na gulôčku pôsobí tiažová sila F_g , kolmo na stenu tlaková sila F_N steny a v smere dotyčnice k valcovej ploche, t.j. v smere pohybu gulôčky sila statického trenia F_T . Moment sily F_T spomaľuje rotáciu gulôčky, rozdiel dotyčnicovej zložky tiažovej sily a sily trenia $F_g \sin \varphi - F_T = m a < 0$ spôsobuje spomaľovanie postupného pohybu gulôčky. Rozdiel normálovej zložky tiažovej sily a tlakovej sily $F_N - F_g \cos \varphi = m a_N > 0$ určuje veľkosť dostredivého zrýchlenia a_N . Pozn.: Zotrvačná (odstredivá) sila sa v inerciálnej sústave nepozoruje.

(B) V najvyššom bode sú dotyčnicové sily nulové, pôsobia iba normálové sily F_N , F_g , pričom platí $F_N = m a_N - F_g \geq 0$.

(C) Na gulôčku pôsobia rovnaké sily ako v prípade (A). Aby sa udržala v kontakte so stenou, musí platiť $F_N = m a_N - F_g \cos \varphi \geq 0$, pričom pri rovnosti gulôčka stráca kontakt so stenou. 1 b

- b) (A) V prvom prípade získame maximálnu výšku zo zákona zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J \omega_0^2 = m g h, \quad (1)$$

kde $J = \frac{2}{5} m r^2$ a $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$.

Odtiaľ dostávame pre výšku kontaktu a maximálnu výšku

$$h = H = \frac{7}{10} \frac{v_0^2}{g}. \quad (2)$$

Pre $v_{01} = 1,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dostaneme $h_1 \approx 12 \text{ cm}$.

1 b

Pre $0 < h \leq R$ dostávame podmienku pre začiatočnú rýchlosť guľôčky

$$0 < v_0 \leq \sqrt{\frac{10}{7} g R} \approx 2,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \text{ aby nastal prípad (A)}. \quad (1 \text{ b})$$

(B) V druhom prípade zostáva guľôčka v kontakte so stenou až do bodu C, ak je počas pohybu tlaková sila valcovej steny kladná. pohybová rovnica $m a = F$, kde $a = v^2/R$ je dostredivé zrýchlenie, a $F = F_N + F_g$, dostávame vzťah pre tlakovú silu

$$F_N = m \frac{v_C^2}{R} - m g. \quad (3)$$

Zo zákona zachovania mechanickej energie máme

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J \omega_0^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J \omega_C^2 + m g 2R,$$

odkiaľ dostávame

$$v_C^2 = v_0^2 - \frac{20}{7} g R. \quad (4)$$

Po dosadení do (3) a úprave dostávame podmienku pre začiatočnú rýchlosť

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{27}{7} g R} \approx 3,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (5) \quad 1 \text{ b}$$

Tejto podmienke vyhovuje z trojice rýchlostí len rýchlosť $v_{03} = 3,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. V tomto prípade je maximálna výška $h = H = 2R$.

Pre dané hodnoty $h_2 = 60 \text{ cm}$.

(C) V treťom prípade stratí guľôčka kontakt so stenou v bode D na oblúku BC steny, pre ktorý platí

$$F_N = m \frac{v_D^2}{R} - m g \cos \alpha_D = 0. \quad (6)$$

Rýchlosť v_D určíme zo zákona zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J \omega_0^2 = \frac{1}{2} m v_D^2 + \frac{1}{2} J \omega_D^2 + m g R (1 + \cos \alpha_D),$$

odkiaľ máme

$$v_D^2 = v_0^2 - \frac{10}{7} g R (1 + \cos \alpha_D). \quad (7)$$

Po dosadení do (6) dostávame pre uhol α_D

$$\cos \alpha_D = \frac{7}{17} \left(\frac{v_0^2}{g R} - \frac{10}{7} \right). \quad (8)$$

Z podmienky $0 < \cos \alpha_D < 1$ máme

$$\sqrt{\frac{10}{7} g R} < v_0 < \sqrt{\frac{27}{7} g R}, \text{ pre dané hodnoty } 2,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} < v_0 < 3,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Výška h bodu D straty kontaktu

$$h = R + R \cos \alpha_D = R + \frac{7R}{17} \left(\frac{v_0^2}{gR} - \frac{10}{7} \right) = \frac{7R}{17} \left(\frac{v_0^2}{gR} + 1 \right). \quad (9) \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $h \approx 40,7 \text{ cm}$.

0,5 b

Z bodu D sa guľôčka pohybuje šikmým vrhom so začiatočnou rýchlosťou v_D a uhlom α_D .

Prírastok výšky Δh do najvyššieho bodu určíme zo zákona zachovania energie

$$\frac{1}{2} m (v_D \sin \alpha_D)^2 = m g \Delta h, \text{ odkiaľ máme}$$

$$\Delta h = \frac{1}{2g} v_D^2 \sin^2 \alpha_D = \frac{1}{2g} v_D^2 (1 - \cos^2 \alpha_D) = \frac{1}{2g} \left[v_0^2 - \frac{10}{7} g R (1 + \cos \alpha_D) \right] (1 - \cos^2 \alpha_D).$$

Po dosadení z (8) a úprave

$$\Delta h = \frac{R}{2} \left(\frac{7}{17} \right)^3 \left[\frac{v_0^2}{gR} - \frac{10}{7} \right] \left(\frac{27}{7} - \frac{v_0^2}{gR} \right) \left(1 + \frac{v_0^2}{gR} \right).$$

Maximálna výška

$$H = h + \Delta h = \frac{7R}{17} \left(\frac{v_0^2}{gR} + 1 \right) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{7}{17} \right)^2 \left(\frac{v_0^2}{gR} - \frac{10}{7} \right) \left(\frac{27}{7} - \frac{v_0^2}{gR} \right) \right]. \quad 2 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $\Delta h \approx 4,7 \text{ cm}$, $H \approx 45,4 \text{ cm}$.

0,5 b

4. RC mostík

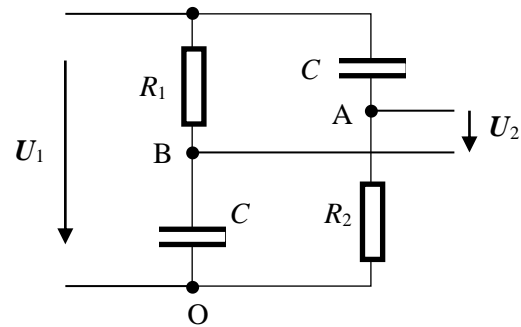
Riešenie:

a) Schému pre názornosť prekreslíme, obr. RA-5.

Činný výkon sa uvoľňuje iba na rezistoroch.
Určíme prúdy prechádzajúce vetvami obvodu

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{U_1}{\sqrt{R_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$I_2 = \frac{U_1}{Z_2} = \frac{U_1}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$



Obr. RA-5

Výkon zdroja rovný príkonu pripojeného filtra

$$P = P_1 + P_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = \frac{U_1^2}{R} \left[\frac{(\omega C R_1)^2}{1 + (\omega C R_1)^2} + \frac{(\omega C R)^2}{1 + (\omega C R)^2} \right].$$

Po dosadení charakteristických uhlových frekvencií máme

$$P = U_1^2 \left[\frac{\omega_1}{\omega_1^2 + \omega^2} + \frac{\omega_2}{\omega_2^2 + \omega^2} \right] \omega^2 C. \quad (1) \quad 2 \text{ b}$$

b) Ide o dva nezaťažené deliče napätia. Výstupné napätie je rozdiel napätí v uzloch A a B vzhľadom na uzol O

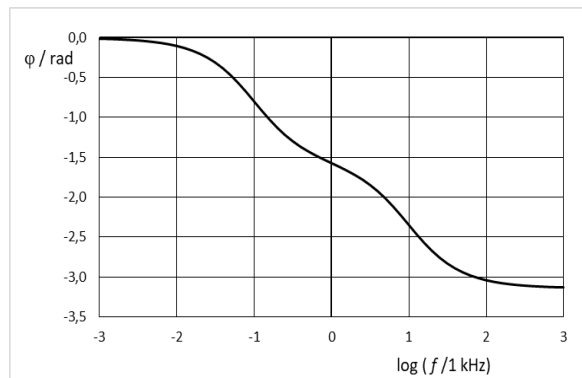
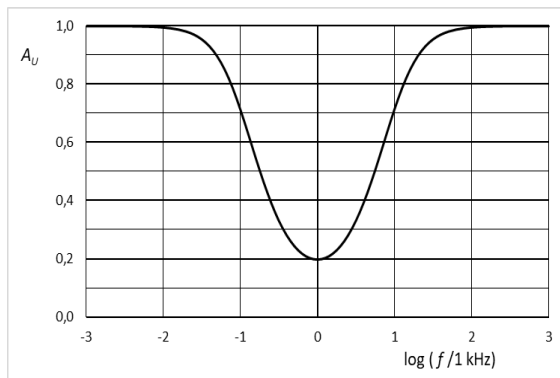
$$U_2 = U_1 \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} - U_1 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}.$$

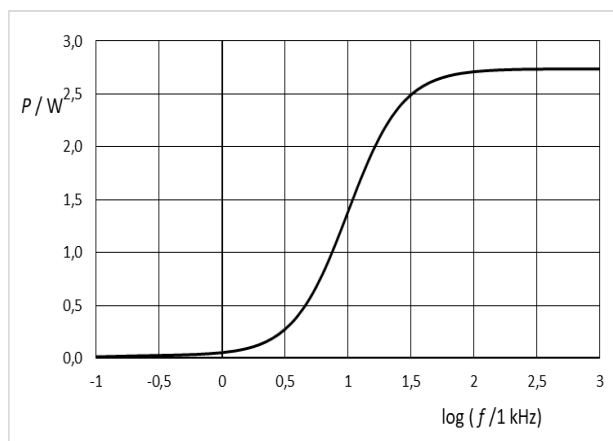
Po úprave vyjadríme komplexný napäťový prenos

$$A_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\omega^2 + \omega_1 \omega_2}{(\omega^2 - \omega_1 \omega_2) - j\omega(\omega_1 + \omega_2)}. \quad (2) \quad 2 \text{ b}$$

c) Zo vzťahu (2) určíme absolútnu hodnotu (veľkosť) a argument prenosu

$$|A_U| = \frac{\omega^2 + \omega_1 \omega_2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1 \omega_2)^2 + \omega^2 (\omega_1 + \omega_2)^2}}, \quad \varphi_A = \arctan \left[\frac{\omega(\omega_1 + \omega_2)}{\omega^2 - \omega_1 \omega_2} \right].$$





Za každý graf 1 b: spolu 3 b

- d) Z grafu $A_U(\omega)$ vidíme, že ide o pásmovú zadrž. 1 b

Decibel (dB) je definovaný pre napätie $A_{dB} = 20 \log(A/A_{ref})$.

Maximálny prenos $A_{U_{max}} = 1$. Pokles o 3 dB znamená pokles na hodnotu

$$\frac{A_U}{A_{U_{max}}} = 10^{\frac{-3}{20}} \approx 0,708.$$

Z grafu odčítame pre úroveň 0,71 približne hodnoty $\log(f/1 \text{ kHz}) \approx -1$ a $+1$, čo znamená $f_1 \approx 0,1 f_0 = 100 \text{ Hz}$ a $f_2 \approx 10 f_0 = 10 \text{ kHz}$. To zodpovedá charakteristickým uhlovým frekvenciám.

Za každú medznú frekvenciu 1 b: spolu 2 b

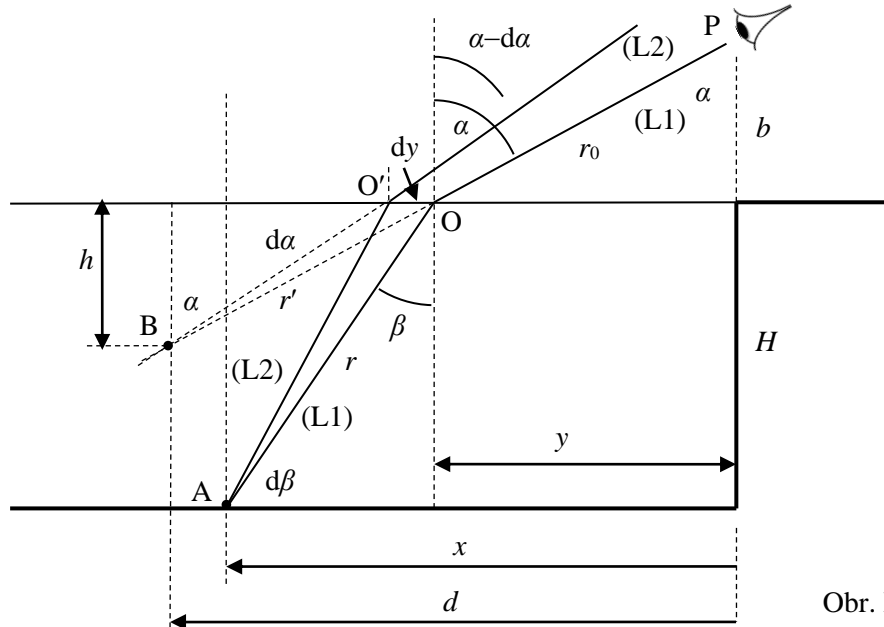
Pozn.: Z grafu φ vidíme, že pre nízke frekvencie filter sleduje fázu napätia a pre vysoké frekvencie mení fázu o 180° , resp. o π rad.

Pre nízke frekvencie je impedancia kapacitorov, a tým i oboch dvojpólov, veľká a prúdy I_1, I_2 sú veľmi malé. Preto je malý i výkon zdroja. Pre vysoké frekvencie je impedancia kapacitorov veľmi malá a dvojpóly majú približne odpor R_1 a R_2 . Výkon zdroja podľa grafu je $P \approx 2,74 \text{ W}$.

5. Pozorovanie kameňa vo vode

Riešenie:

a)



Obr. RA-6

Obr. RA-6 2 b

Lúč (L1) z bodu A na dne dopadá na hladinu pod uhlom dopadu β a láme sa v bode O pod uhlom α , pod ktorým ho chlapec pozoruje. Zdanlivý obraz B bodu A sa nachádza na predĺžení lúča dopadajúceho do oka. Na určenie polohy bodu B potrebujeme ešte druhý lúč (L2), ktorý sa nepatrne odchyľuje od lúča (1) a láme sa v bode O' pod uhlom $\alpha - d\alpha$. V priesečníku predĺžení lúčov (L1) a (L2) dopadajúcich do oka sa nachádza zdanlivý obraz B bodu A.

b) Pre uhly β dopadu a α lomu lúčov (L1) a (L2) platí zákon lomu

$$\sin \alpha = \frac{n}{n_0} \sin \beta = n \sin \beta \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - d\alpha) = n \sin(\beta - d\beta),$$

$$\text{resp. } \sin \alpha \cos d\alpha - \cos \alpha \sin d\alpha = n(\sin \beta \cos d\beta - \cos \beta \sin d\beta). \quad (2)$$

Pre veľmi malé uhly $d\alpha$, $d\beta$ platia približné vzťahy

$$\cos d\alpha \approx 1, \cos d\beta \approx 1, \sin d\alpha \approx d\alpha, \sin d\beta \approx d\beta.$$

Po dosadení do (2) a s uvažovaním (1) máme

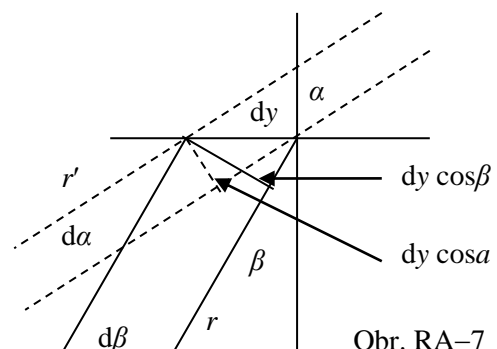
$$d\alpha = n \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} d\beta. \quad (3)$$

Z obr. RA-7 máme vzťahy

$$d\alpha = \frac{dy \cos \alpha}{r'} \quad \text{a} \quad d\beta = \frac{dy \cos \beta}{r},$$

$$\text{kde } r \equiv OA, r' \equiv OB. \quad (4)$$

Z (3) a (4)



Obr. RA-7

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{r \cos \alpha}{r' \cos \beta} = n \frac{\cos \beta}{\cos \alpha},$$

odkiaľ

$$r' = \frac{r \cos^2 \alpha}{n \cos^2 \beta} = \frac{r \cos^2 \alpha}{n (1 - \sin^2 \beta)} = \frac{n \cos^2 \alpha}{n^2 - \sin^2 \alpha} r.$$

Z obrázku vidíme, že

$$y = b \tan \alpha, \quad x - y = H \tan \beta, \quad h = r' \cos \alpha, \quad d - y = r' \sin \alpha, \quad H = r \cos \beta. \quad (5)$$

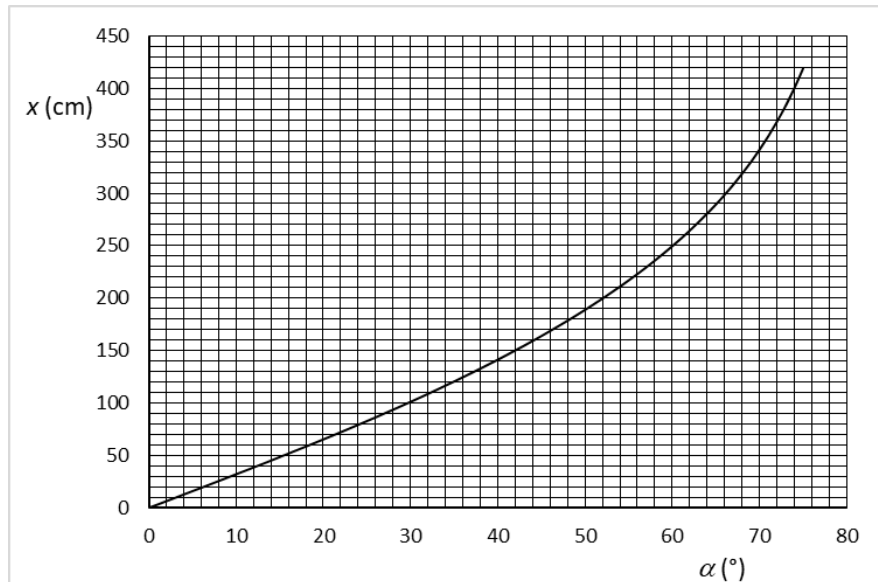
S použitím (5) a (6) dostávame $r' = \frac{H \cos^2 \alpha}{n \cos^3 \beta} = \frac{n^2 \cos^2 \alpha}{(n^2 - \sin^2 \alpha)^{3/2}} H.$ (6)

$$x = b \tan \alpha + H \tan \beta = b \tan \alpha + H \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} \text{ a po úprave}$$

$$x = b \tan \alpha + H \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}. \quad (7) \quad 2 \text{ b}$$

Graf funkcie $x = f(\alpha)$ je na obr. RA – 8

1 b



Obr. RA–8

c) Pre hĺbku dostávame

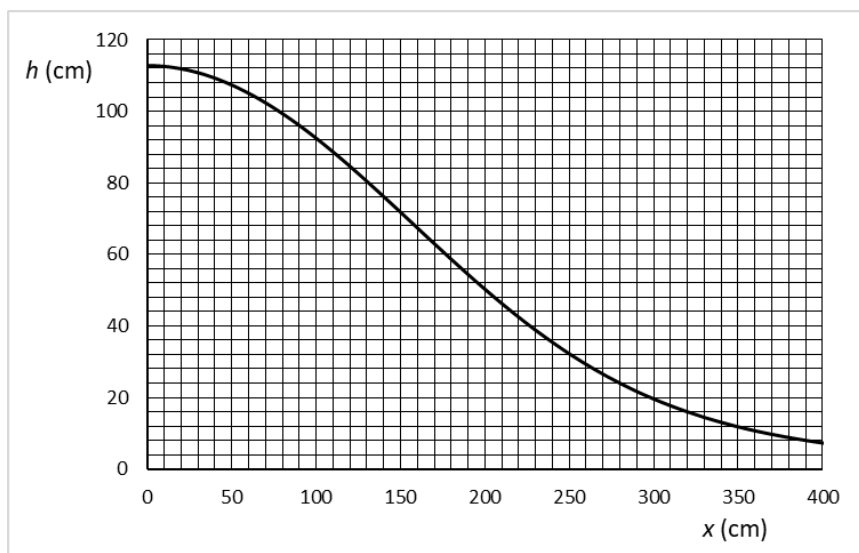
$$h = r' \cos \alpha = H \frac{n^2 \cos^3 \alpha}{(n^2 - \sin^2 \alpha)^{3/2}}. \quad 1 \text{ b}$$

Jedna z možností je zostaviť tabuľku, v prvom stĺpci α , v druhom x a v treťom h . Graf zostrojíme z dvojíc x, h .

Výhodnejšou možnosťou je použiť vhodný tabuľkový procesor, napr. MS EXCEL, v ktorom sa vyplnia príslušné tabuľky a hneď sa aj vytvoria požadované grafy.

Požadovaný graf je na obr. RA–9.

1b



Obr. RA-9

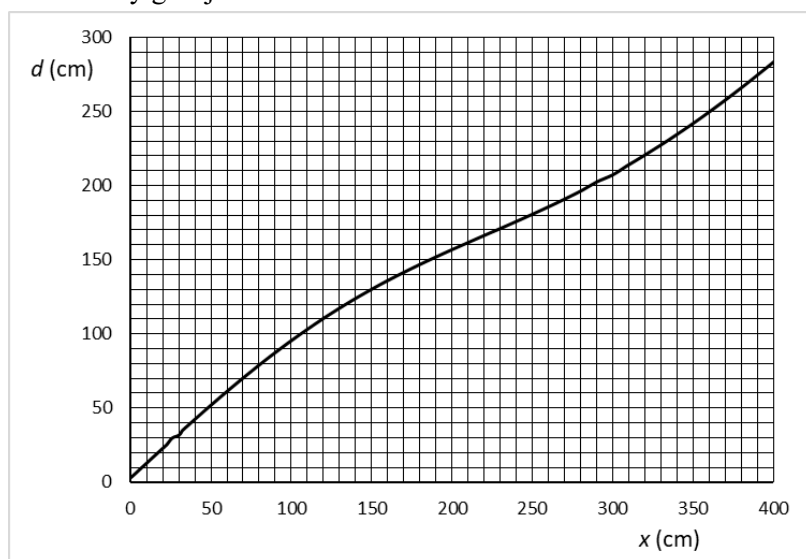
d) Pre zdanlivú vzdialenosť máme

$$d = y + r' \sin \alpha = b \tan \alpha + \frac{n^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{(n^2 - \sin^2 \alpha)^{3/2}} H . \quad 1 \text{ b}$$

Do tabuľky, ako uvádzame vyššie, pridáme stĺpec d a zostrojíme graf z dvojíc d, x .

Požadovaný graf je na obr. RA-10

1 b



Obr. RA-10

Na rozdiel od odhadnutého úvodného obrázku sa zdanlivý obraz B približuje voči A.

e) Pomocou tabuľky alebo grafov určíme hodnoty:

pre $x_1 = a = 30$ cm máme $\alpha \approx 9,4^\circ$, $h_1 \approx 111$ cm, $d_1 \approx 29,8$ cm 0,5 b

pre $x_{10} = 10$ a = 300 cm máme $\alpha_{10} \approx 66,1^\circ$, $h_{10} \approx 19,6$ cm, $d_{10} \approx 202$ cm. 0,5 b

Ako vidíme z výsledkov, pri pozeraní kolmo do vody je zdanlivá hĺbka $H/n \approx 113$ cm. So zväčšujúcou sa vzdialenosťou objektu na dne od steny sa zdanlivá hĺbka h znižuje, napr. pre $x \approx 400$ cm je $h \approx 7$ cm a objekt sa zdanlivo približuje, napr. pre $x = 400$ cm je $d \approx 270$ cm. To znamená, že v pozorovanej vzdialenosti 270 cm od steny sa bazén javí plytký, iba 7 cm.

6. Kmity cievky s prúdom v magnetickom poli

Riešenie:

- a) Keďže upevnenie cievky je na pružnom vlákne, pri vychýlení o uhol α pôsobí na cievku vratný (torzný) moment

$$M = -k \alpha, \text{ (Hookov zákon pre torziu)} \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

kde k je súčiniteľ torzie vlákna.

Pohybová rovnica rotačného pohybu cievky je

$$J \varepsilon = M, \text{ tzn. } J \ddot{\alpha} = -k \alpha \quad (2)$$

kde J je moment zotrvačnosti cievky a $\varepsilon = \ddot{\alpha}$ uhlové zrýchlenie (druhá derivácia uhla α podľa času). Ide o diferenciálnu rovnicu harmonických kmitov

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0,$$

$$\text{kde } \omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{J}} \text{ je uhlová frekvencia kmitov cievky.} \quad (3)$$

Moment zotrvačnosti úsekov cievky rovnobežných s osou otáčania

$$J_1 = (2N - 1) m_a \left(\frac{b}{2} \right)^2,$$

kde $m_a = \rho V_a = \rho \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) a$ je hmotnosť zvislého úseku a $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ hustota medi.

Priečne úseky s počtom $(4N - 2)$ majú dĺžku $b/2$ vzhľadom na koncový bod na osi. Všeobecne moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os kolmú na tyč prechádzajúcu koncovým bodom je $J = (1/3) m l^2$. Moment zotrvačnosti priečných častí cievky vzhľadom na os otáčania

$$J_2 = 2(2N - 1) \frac{1}{3} \frac{m_b}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^2,$$

kde $m_b = \rho V_b = \rho \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) b$.

Moment zotrvačnosti celej cievky vzhľadom na os otáčania je daný súčtom momentov zvislej časti a priečnej časti cievky

$$J = (2N - 1) \rho \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) \left[a + \frac{1}{3} b \right] \left(\frac{b}{2} \right)^2. \quad (4) \quad 0,5 \text{ b}$$

a súčiniteľ torzie závesu podľa (3)

$$k = 4\pi^2 f_0^2 J = 4\pi^2 f_0^2 (2N - 1) \rho \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) \left[a + \frac{1}{3} b \right] \left(\frac{b}{2} \right)^2. \quad 0,5 \text{ b}$$

Ak začne cievkou prechádzať prúd I , na zvislé úseky závitov pôsobí sila

$F_1 = NBIa$, resp. v opačnom smere $F_2 = (N - 1)BIa$ kolmo na smer vodičov a magnetickej indukcie. Celkový moment týchto síl vzhľadom na os otáčania

$$M_1 = \left[NBIa \frac{b}{2} + (N - 1)BIa \frac{b}{2} \right] \cos \alpha_1 = \frac{2N - 1}{2} B I a b \cos \alpha_1. \quad (5)$$

Ak uvážime vzťah (1), pre stav rovnováhy máme

$$k \alpha_1 = M_1 = (2N - 1) B I a \frac{b}{2} \cos \alpha_1. \quad (6)$$

Pre uhol vychýlenia pri prúde I_1 máme

$$\alpha_1 = (2N-1) \frac{BI_1 ab}{2k} \cos \alpha_1. \quad 1 \text{ b}$$

Súčiniteľ torzie k vlákna určíme z frekvencie kmitov v stave s nulovým prúdom podľa (3) a s použitím (4) dostávame

$$\alpha_1 = \frac{BI_1 ab}{8\pi^2 f_0^2 \rho \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) \left[a + \frac{1}{3}b\right] \left(\frac{b}{2}\right)^2} \cos \alpha_1. \quad (7) \quad 1 \text{ b}$$

b) Pri vychýlení cievky zo začiatkovej polohy pôsobí na cievku moment sily

$$M = -k\alpha + \frac{2N-1}{2} BI_1 ab \cos \alpha = -k(\alpha_1 + \Delta\alpha) + \frac{2N-1}{2} BI_1 ab \cos(\alpha_1 + \Delta\alpha).$$

Ak použijeme vzťah $\cos(\alpha_1 + \Delta\alpha) = \cos \alpha_1 \cos \Delta\alpha - \sin \alpha_1 \sin \Delta\alpha$,

pre malé výchylky $\Delta\alpha \ll 1$ rad dostávame približný vzťah $\cos(\alpha_1 + \Delta\alpha) \approx \cos \alpha_1 - \Delta\alpha \sin \alpha_1$.

Moment sily upravíme na tvar

$$M = \left(-k\alpha_1 + \frac{2N-1}{2} BI_1 ab \cos \alpha_1\right) - \left(k + \frac{2N-1}{2} BI_1 ab \sin \alpha_1\right) \Delta\alpha$$

a s uvažovaním (6)

$$M = -\left(k + \frac{2N-1}{2} BI_1 ab \sin \alpha_1\right) \Delta\alpha = -k^* \Delta\alpha, \text{ kde } k^* = k + \frac{2N-1}{2} BI_1 ab \sin \alpha_1.$$

Frekvencia kmitov je potom

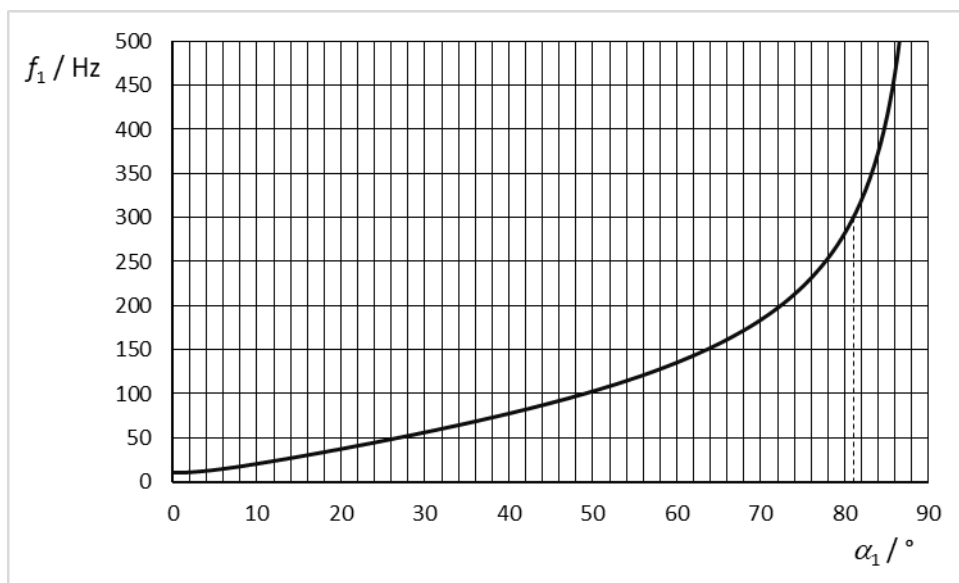
$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k^*}{J}} = \sqrt{\frac{k + \left(\frac{2N-1}{2}\right) BI_1 ab \sin \alpha_1}{4\pi^2 (2N-1) \rho \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) \left[a + \frac{1}{3}b\right] \left(\frac{b}{2}\right)^2}} = \quad (8) \quad 2 \text{ b}$$

$$= \sqrt{f_0^2 + \frac{2BI_1 a \sin \alpha_1}{\pi^3 \rho d^2 b \left(a + \frac{1}{3}b\right)}}.$$

c) Najjednoduchší spôsob spočíva v úprave (7) na tvar vyjadrujúci B ako funkciu α_1 .

$$B = \frac{8\pi^2 f_0^2 \rho \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) \left[a + \frac{1}{3}b\right] \left(\frac{b}{2}\right)^2}{I_1 ab} \frac{\alpha_1}{\cos \alpha_1}. \quad 1 \text{ b}$$

Pre hodnoty α_1 sa vypočíta B a zostaví do tabuľky. Zo získaných hodnôt potom možno zostrojiť graf α_1 ako funkcie B , obr. RA-11 1 b

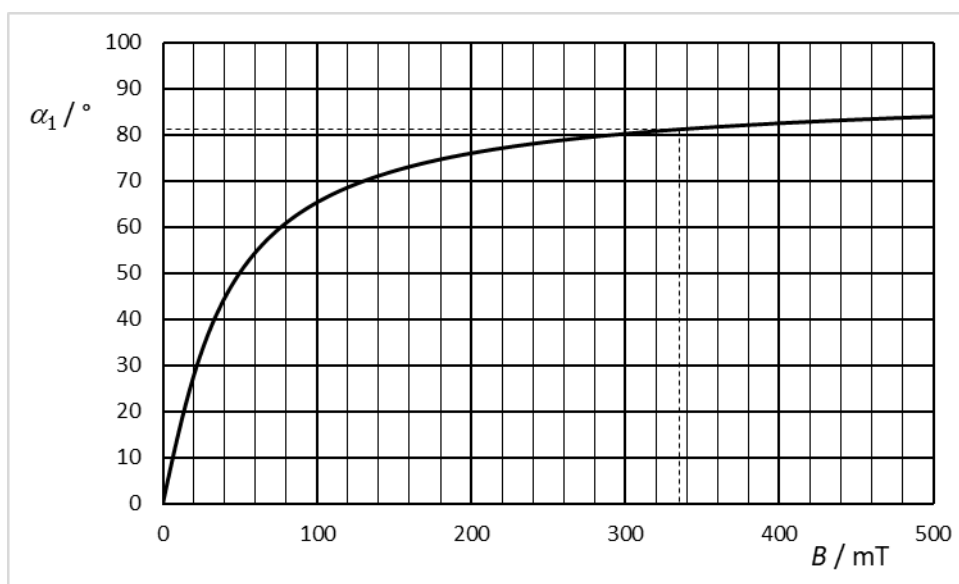


Obr. RA-11

Pri konštrukcii druhého grafu použijeme vzťah (8)

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k + \frac{2N-1}{2} B I_1 a b \sin \alpha_1}{J}}$$

Pre hodnoty α_1 a hodnoty B z tabuľky určíme f_1 a doplníme do ďalšieho stĺpca. Zo získaných hodnôt zostrojíme graf frekvencie f_1 ako funkciu α_1 , obr. RA-12. 1 b



Obr. RA-12

d) Pre frekvenciu $f_1 = 300$ Hz je príslušný riadok tabuľky

| $\alpha_1 / ^\circ$ | B / mT | f_1 / Hz |
|---------------------|-----------------|-------------------|
| 81,1 | 335 | 300 |

To súhlasí s grafmi. Z druhého grafu $\alpha_1 \approx 81,1^\circ$. Z prvého grafu pre $\alpha_1 = 81,1^\circ$ určíme hodnotu horizontálnej zložky magnetického poľa $B_h \approx 335$ mT. 1 b

7. DVD – video disk – experimentálna úloha

Riešenie:

Technické parametre DVD uvádzajú: $\delta \approx 0,74 \mu\text{m}$, z toho máme počet závitov $n \approx 47,3 \cdot 10^3$, dĺžku stopy $L \approx 11,9 \text{ km}$ a $l \approx 2,53 \mu\text{m}$, $v_L \approx 3,61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $N_1 \approx 1\,530 \text{ min}^{-1}$, $N_2 \approx 600 \text{ min}^{-1}$.

62. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie A

Autori návrhov úloh: Lubomír Konrád (1,3,5,6), Aba Teleki (2), Ivo Čáp (1,4,6,7)

Recenzia a úprava úloh a riešení: Daniel Kluvanec, Lubomír Mucha, Ivo Čáp

Redakcia: Ivo Čáp

Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020

