1. *Určte všetky dvojice prirodzených čísel (a, b), pre ktoré platí*

$$a + 5\sqrt{b} = b + 5\sqrt{a}.$$

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Substitúciou $m = \sqrt{a}$, $n = \sqrt{b}$ prevedieme rovnicu na tvar $m^2 - n^2 - 5(m - n) = 0$, odkiaľ s pomocou vzorca pre rozdiel štvorcov dostaneme $(m-n)(m+n-5) = 0$. Takže $m - n = 0$ alebo $m + n = 5$.

V prvom prípade po spätnej substitúcii zistíme, že úlohe vyhovujú všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí $b = a$. V druhom dostávame $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5$. Teda $1 \leqq \sqrt{a}, \sqrt{b} \leqq 4$, preto stačí postupne dosadzovať $a = 1, 2, \ldots, 16$ do vzťahu

$$b = \left(5 - \sqrt{a}\right)^2 \tag{1}$$

a zisťovať, či je prislúchajúce číslo b prirodzené.

Daná rovnica sa nemení zámenou neznámych a, b. Môžeme teda predpokladať, že $a \leqq b$, čo spolu s rovnosťou $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5$ znamená, že $\sqrt{a} \leqq 2{,}5$. Odtiaľ $a \leqq 6{,}25$. Preto sa stačí pri dosadzovaní zaoberať len hodnotami $a = 1, 2, \ldots, 6$ a zvyšné riešenia určiť zámenou čísel a, b v nájdených dvojiciach.

Dôvtipnejší postup spočíva v umocnení zátvorky na pravej strane vzťahu (1) a následnej úprave na tvar

$$\frac{25 + a - b}{10} = \sqrt{a}, \tag{2}$$

z ktorého je zrejmé, že číslo a (a vzhľadom na symetriu danej rovnice aj číslo b) je druhou mocninou prirodzeného čísla. (V opačnom prípade by na ľavej strane rovnosti (2) bolo racionálne číslo, zatiaľ čo na pravej strane iracionálne.) Potom je aj ľavá strana vzťahu (2) prirodzené číslo menšie ako päť. Odtiaľ vyplýva, že rozdiel $a - b$ je nepárny násobok piatich. Pri predpoklade $a < b$ teda buď $(a, b) = (4, 9)$, alebo $(a, b) = (1, 16)$. Ďalšie dve riešenia vzniknú zámenou čísel a, b.

Záver. Danej rovnici vyhovujú len dvojice $(a, b) = (1, 16), (4, 9), (9, 4), (16, 1)$ a všetky dvojice (a, a), pričom a je ľubovoľné prirodzené číslo.

Návodné úlohy:

1. Súčet druhých odmocnín prirodzených čísel a, b je číslo prirodzené práve vtedy, keď sú čísla a, b druhými mocninami prirodzených čísel. Dokážte.
2. Nájdite všetky dvojice (x, y) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$y\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 4y + 12 = 0.$$

[Riešením sú všetky dvojice $(16, n)$ a $(n, 3)$, pričom $n \in \mathbb{N}$.]

3. Nájdite všetky dvojice a, b nezáporných reálnych čísel, pre ktoré platí

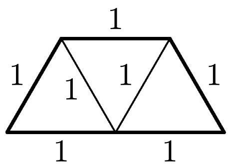
$$\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{b^2 + a} = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a + b}.$$

[48–C–S–1]

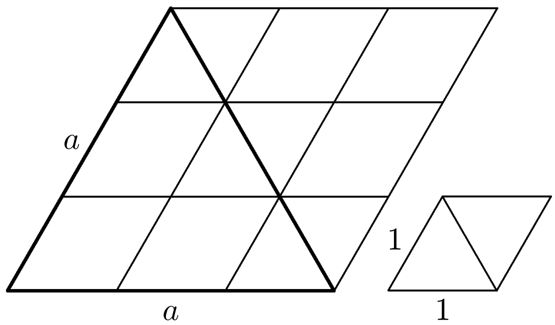
2. *Nájdite všetky trojuholníky, ktoré sa dajú rozrezať na lichobežníky so stranami dĺžok 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm.*

(Ján Mazák)

Riešenie. Lichobežníky so stranami dĺžok 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm sú všetky navzájom zhodné a skladajú sa z troch rovnostranných trojuholníkov (obr. 1a). (Základne každého lichobežníka majú dve rôzne dĺžky, v našom prípade to musia byť 2 cm a 1 cm.) Budeme ich nazývať *základné lichobežníky*. Rovnostranný trojuholník s dĺžkou strany 1 cm nazveme *základný trojuholník*.

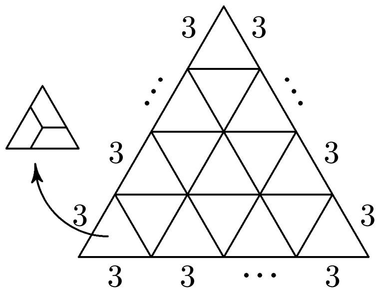


Obr. 1a



obr. 1b

Vidíme, že každý z hľadaných trojuholníkov sa dá rozrezať na konečný počet základných trojuholníkov. Preto sú veľkosti jeho vnútorných uhlov násobkami šesťdesiatich stupňov. Vnútorné uhly každého trojuholníka sú tri a súčet ich veľkostí je $180°$, má teda zmysel hľadať len rovnostranné trojuholníky. Z podmienky rozrezania na konečný počet základných trojuholníkov ďalej vyplýva, že dĺžka strany hľadaného trojuholníka vyjadrená v centimetroch je prirodzené číslo. Ak ju označíme a, dá sa náš trojuholník rozrezať práve na a^2 základných trojuholníkov. To možno odvodiť napríklad vydelením jeho obsahu $S_a = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ a obsahu $S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ základného trojuholníka. Všeobecnejšie platí, že dva trojuholníky, ktoré sú podobné s koeficientom k, majú obsahy v pomere k^2.



Obr. 2

Iné odvodenie počtu základných trojuholníkov v rovnostrannom trojuholníku so stranou a centimetrov vyplýva z doplnenia trojuholníka na kosoštvorec podľa obr. 1b, kde bolo zvolené $a = 3$. Kosoštvorec je zložený z dvoch rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky a centimetrov. Dá sa teda rozrezať na a^2 kosoštvorcov (jeden je zobrazený v pravej dolnej časti obr. 1b), z ktorých každý je zložený z dvoch základných trojuholníkov a ktorým tiež budeme hovoriť základné. Odtiaľ vyplýva, že rovnostranný trojuholník obsahuje rovnaký počet základných trojuholníkov, ako jemu prislúchajúci kosoštvorec obsahuje základných kosoštvorcov.

Zistili sme, že každý z hľadaných trojuholníkov je rovnostranný so stranou dĺžky a centimetrov ($a \in \mathbb{N}$) a že je zložený z a^2 základných trojuholníkov. Pretože každý základný lichobežník obsahuje práve tri základné trojuholníky, musí byť číslo a^2, a teda aj číslo a, deliteľné tromi. Z obr. 2 potom vyplýva, že každý rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky $3n$ centimetrov, pričom $n = 1, 2, \ldots$, sa dá rozrezať na základné lichobežníky.

Záver. Podmienkam úlohy vyhovujú len rovnostranné trojuholníky s dĺžkou strany $3n$ centimetrov, pričom n je prirodzené číslo.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Daný rovnostranný trojuholník rozdeľte na: a) 18, b) 19, c) 20 rovnostranných, nie nutne zhodných trojuholníkov. [41–Z7–II–1]
2. Rozdeľte štvorec so stranou dĺžky 12 cm na tri obdĺžniky s čo najmenšími rovnakými obvodmi. [49–Z6–I–2]
3. Určte všetky štvorce, ktoré sa dajú bez zvyšku rozrezať na T-tetraminá (útvary zložené zo štyroch jednotkových štvorcov). [41–Z8–I–6]

---

3. *Nájdite všetky prirodzené čísla, ktorých zápis neobsahuje nulu a má nasledujúcu vlastnosť: ak v ňom vynecháme ľubovoľnú číslicu, dostaneme číslo, ktoré je deliteľom pôvodného čísla.*

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Hľadané číslo n obsahuje aspoň dve cifry. Zapíšme ho v tvare $n = 10a + b$, pričom a je číslo, ktoré vznikne škrtnutím poslednej cifry b čísla n. Podľa zadania $a \mid 10a + b$. Odtiaľ $a \mid b$. Nakoľko vieme, že $b \neq 0$, musí byť a jednociferné číslo, takže n je dvojciferné s nenulovými ciframi a, b, pričom $b = ka$, $k \in \mathbb{N}$.

Ak škrtneme cifru a v čísle n, zostane číslo b, ktoré musí deliť pôvodné číslo $n = 10a + b$, z čoho postupne dostávame $b \mid 10a$, $ka \mid 10a$, $k \mid 10$ a odtiaľ $k \in \{1, 2, 5\}$. Dosadením do $b = ka$ dostaneme tri možné prípady $b = a$, $b = 2a$ a $b = 5a$ a v každom z nich ľahko určíme vyhovujúce dvojice cifier a, b. Tak zistíme, ako musia hľadané čísla $n = 10a + b$ vyzerať.

Záver. Riešením úlohy sú čísla 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88 a 99. Skúškou sa presvedčíme, že všetky vyhovujú podmienkam úlohy.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Nájdite všetky celé čísla od 1 do 1 000 000, ktoré sa škrtnutím prvej číslice 73-krát zmenšia. [9 125, 91 250, 912 500; 45–Z7–I–3]
2. Pred dané trojciferné číslo napíšeme jeho osemnásobok. Vznikne šesťciferné alebo sedemciferné číslo. (Napríklad pre číslo 103 vznikne číslo 824 103.) Ukážte, že vzniknuté číslo je vo všetkých prípadoch deliteľné aspoň tromi rôznymi prvočíslami. [41–Z8–III–3]

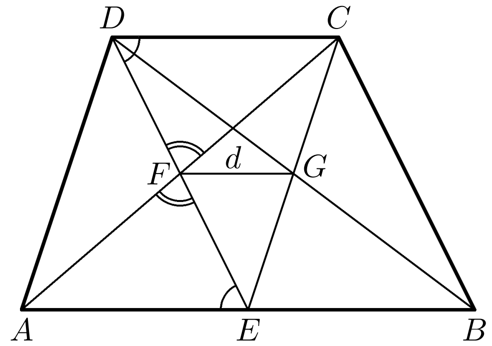
---

4. *Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD. Označme E stred strany AB, F stred úsečky DE a G priesečník úsečiek BD a CE. Vyjadrite obsah lichobežníka $ABCD$ pomocou jeho výšky v a dĺžky d úsečky FG za predpokladu, že body A, F, C ležia na jednej priamke.*

(*Ján Mazák*)

Riešenie. Podľa zadania sú uhly EFD a AFC priame, takže (obr. 3)

$$|\sphericalangle CDF| = |\sphericalangle AEF| \quad \text{(striedavé uhly)},$$
$$|\sphericalangle CFD| = |\sphericalangle AFE| \quad \text{(vrcholové uhly)}.$$



Obr. 3

Navyše bod F rozpoľuje úsečku DE, preto $|DF| = |EF|$ a trojuholníky CDF a AEF sú zhodné podľa vety *usu.* Odtiaľ vyplýva, že $|CD| = |AE|$, čo spolu s rovnosťou $|AE| = |EB|$ vedie k záveru, že EB a DC sú dve zhodné a rovnobežné úsečky. To znamená, že štvoruholník $EBCD$ je rovnobežník. Priesečník G jeho uhlopriečok preto rozpoľuje každú z nich. Body F a G sú stredy strán AC, EC trojuholníka AEC, takže úsečka FG je jeho strednou priečkou a $|AE| = 2|FG|$. Preto

$$|AB| = 2|AE| = 4d \quad \text{a} \quad |CD| = |AE| = 2d.$$

Obsah lichobežníka $ABCD$ je $S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)v = 3dv$.

Návodné úlohy:

1. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ označme K, L, M a N postupne stredy strán AB, BC, CD a DA. Dokážte, že štvoruholník $KLMN$ je rovnobežník. Pre ktoré štvoruholníky $ABCD$ je $KLMN$ štvorec?
2. Zostrojte lichobežník, ak sú dané dĺžky 9 cm a 12 cm jeho uhlopriečok, dĺžka 8 cm jeho strednej priečky a vzdialenosť 2 cm stredov uhlopriečok. [50–C–I–2]

---

5. *Zistite, pre ktoré prirodzené číslo n je podiel*

$$\frac{33\,000}{(n-4)(n+1)}$$

a) čo najväčšie, b) čo najmenšie prirodzené číslo.

(Eva Řídká)

Riešenie. Platí $33\,000 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$ a $(n+1) - (n-4) = 5$. Pretože pre každé prirodzené n je hodnota $n+1$ kladná, daný podiel je kladný len vtedy, keď je kladná aj hodnota $n-4$, odtiaľ $n \geqq 5$.

a) Pre každé prirodzené $n \geqq 5$ platí $n - 4 \geqq 1$ a $n + 1 \geqq 6$, preto je najväčšia hodnota daného podielu rovná $33\,000 : (1 \cdot 6) = 5\,500$ a dostaneme ju pre $n = 5$.

b) Pri hľadaní najmenšieho podielu označme a, b čísla $n+1$, $n-4$ v poradí, ktoré ešte upresníme. Predpokladajme najskôr, že rozklad čísla ab na súčin prvočiniteľov obsahuje prvočísla 11 a 5. Potom sú a, b po sebe idúce násobky piatich a práve jedno z nich, dajme tomu a, je násobkom čísla 55.

Uvažujme najskôr $a = 55$. Z dvoch možných hodnôt $b = 50$ a $b = 60$ vyberieme tú väčšiu (aby sme dostali menšiu hodnotu skúmaného podielu). Hodnote $b = 60$ z rovnosti $n + 1 = 60$ (alebo z rovnosti $n - 4 = 55$) prislúcha $n = 59$ a skúmaný podiel je potom rovný číslu 10.

Pre $a = 110$ (resp. $a = 165$) nie je číslo 33 000 deliteľné žiadnym zo susedných násobkov piatich, teda číslami 105 a 115 (resp. 160 a 170).

Pre ďalšie (väčšie) násobky a čísla 55 dostávame $ab \geqq 215 \cdot 220 > 33\,000$.

Ak rozklad čísla ab na súčin prvočiniteľov neobsahuje prvočíslo 11 alebo prvočíslo 5, je skúmaný podiel (ak je celočíselný) deliteľný číslom 11 resp. číslom 125, takže je to číslo väčšie ako hodnota 10, ktorú sme našli skôr.

Záver. Najväčšia hodnota daného podielu je 5 500 pre $n = 5$ a najmenšia je 10 pre $n = 59$.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Z (nie nutne všetkých) cifier 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 utvorte čo najväčšie číslo s rôznymi ciframi tak, aby bolo deliteľné číslom 72. [98 653 104; 42–Z6–I–2]
2. V čísle 71 839 664 518 nahraďte niektoré cifry štvorkami tak, aby vzniklo čo najmenšie číslo deliteľné číslom 18. [41 434 444 548; 48–Z7–I–1]

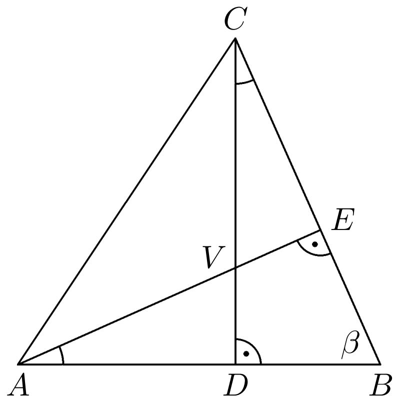
---

6. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom D je päta výšky z vrcholu C a V priesečník výšok. Dokážte, že $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$ práve vtedy, keď $|CD| = |AB|$.*

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie. Pri označení podľa obr. 4 dostaneme

$$|\sphericalangle ADV| = |\sphericalangle CDB| = 90^\circ,$$
$$|\sphericalangle VAD| = |\sphericalangle BAE| = 90^\circ - \beta = |\sphericalangle BCD|.$$



Obr. 4

Trojuholníky ADV a CDB sú teda podobné podľa vety *uu*. Z tejto podobnosti vyplýva

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|VD|}{|BD|}$$

a odtiaľ $|AD| \cdot |BD| = |CD| \cdot |VD|$. Zdôraznime, že táto rovnosť platí pre každý ostrouhlý trojuholník ABC. Vzťah $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$ zo zadania úlohy teda platí práve vtedy, keď $|CD| = |AB|$.

Návodné úlohy:

1. Uhlopriečky konvexného štvoruholníka $ABCD$ sa pretínajú v bode F. Dokážte, že strany BC a AD sú rovnobežné práve vtedy, keď $|AE| \cdot |BE| = |CE| \cdot |DE|$.
2. Nech V je priesečník výšok trojuholníka ABC a A', B', C' sú päty jeho výšok z vrcholov A, B, C. Dokážte, že $|AV| \cdot |A'V| = |BV| \cdot |B'V| = |CV| \cdot |C'V|$.
3. Nech AC je dlhšia uhlopriečka rovnobežníka $ABCD$ a body E a F sú päty kolmíc z vrcholu C na priamky AB a AD. Dokážte, že $|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC|^2$. [Návod: Označte G pätu kolmice z bodu B na úsečku AC a dokážte najskôr podobnosť trojuholníkov ABG, ACE a podobnosť trojuholníkov CBG, ACF.]