MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

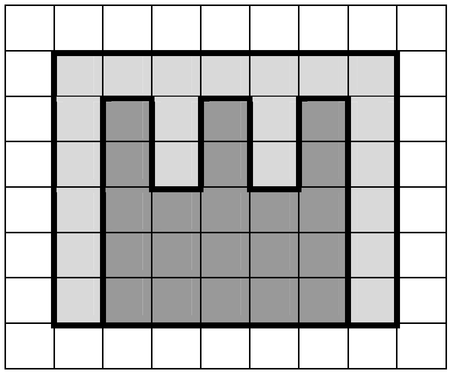
Komentáre a riešenia úloh domáceho kola pre
žiakov základných škôl
a nižších ročníkov osemročných gymnázií

Školský rok 2006/2007

Riešenia a komentáre kategórie Z4
RNDr. M. Dillingerová, PhD.

Z4-I-1

Na obrázku sú v štvorčekovej sieti znázornené dva ZUBOUHOLNÍKY (svetlosivý a tmavosivý), ktoré sa zahryzli do seba. (ZUBOUHOLNÍK je špeciálny druh mnohouholníka.) Zistite, ktorý z nich má väčší obsah a ktorý obvod. (Bednářová S.)



Obr. 1

Riešenie:

Pre zistenie obsahu stačí spočítať, z koľkých štvorčekov sú zubouholníky poskladané. Svetlosivý obsahuje 21 štvorčekov a tmavosivý tiež 21 štvorčekov. Obsah majú oba zubouholníky rovnaký.
Pre obvod budeme spočítavať strany štvorčekov, ktoré tvoria hranicu zubouholníka. Obvod svetlosivého tvorí 44 strán štvorčekov a obvod tmavosivého iba 28 strán. Obvod svetlosivého zubouholníka je väčší.

Poznámka:

Časť úlohy o obvodoch je riešiteľná aj vhľadom. Stačí totiž uvažovať iba ten kus obvodu, ktorý nemajú zubouholníky spoločný. U tmavosivého ide o jedinú úsečku, u svetlosivého ide o akési „obídenie dookola“ okolo spomínanej úsečky. Preto má svetlosivý mnohouholník väčší obvod. Pri takomto riešení poproste žiaka, či by vedel vyčísliť o koľko strán štvorčekov je to viac. Žiaci si pravdepodobne zvolia konkrétny rozmer pre štvorček. Takéto riešenie je u štvrtáka akceptovateľné. Starší žiaci by však mali poukázať na fakt, že takáto voľba nemá vplyv na výsledok úlohy.

Z4-I-2

Miss STRANGELANDIA dostala tak veľa rôznych ponúk od rôznych modelingových agentúr, že si z nich nevedela vybrať. Napokon sa rozhodla, že prijme ponuku tej z nich, ktorá ako prvá uhádne číslo jej topánok. Prezradila im, že je to dvojciferné číslo s ciferným súčtom 12 a že, keby sa v tomto čísle zmenilo poradie číslic, vzniklo by číslo o 54 väčšie. Aké číslo topánok nosí Miss STRANGELANDIA? (Bednářová S.)

Riešenie:

Hľadám dvojciferné číslo, ktorého súčet cifier je 12. 12 sa dá rozložiť na súčet dvoch jednociferných čísel nasledujúcim spôsobom:

$12 = 3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7 = 6 + 6 = 7 + 5 = 8 + 4 = 9 + 3$

Číslo 66 vylúčime hneď – po zámene číslic sa číslo nezmení.
U ostatných čísel skontrolujeme rozdiel.

$93 - 39 = 54$

$84 - 48 = 36$

$75 - 57 = 18$

Miss Strangelandia nosí topánky číslo 39.

Poznámka:

Žiakom bude zrejme potrebné vysvetliť pojem ciferný súčet.
Riešenia, opierajúce sa iba o ciferný súčet a skúsenosť, že jediné rozumné číslo topánok je 39 sú neúplné.

Ak však žiak začne „rozumnými“ číslami topánok (napr.: 33 – 41), nájde čísla so správnym rozdielom a skontroluje ciferný súčet, riešenie je úplné. Ťažšie to budú mať žiaci uvažujúci v slovenských veľkostiach topánok (22 – 27). Tých treba naviesť na inú formu riešenia.

Z4-I-3

Jurko včera na magnetickej tabuli vytvoril vzorový príklad. Dnes, keď prišiel do školy, zistil, že pani upratovačka ho „upratala“ a všetky použité číslice a znaky zoradila na dolnom okraji tabule takto:

3 4 5 6 8 9 + =

Aký príklad vytvoril včera Jurko? Nájdi všetky možnosti. (Dillingerová M.)

Riešenie:

Zo znakov + a = vieme, že išlo o príklad na sčítanie. Číslic je 6. Teda mohli nastať dva prípady:

1. *jednociferné + dvojciferné = trojciferné*
   Tu by trojciferné číslo muselo začínať číslicou 1. Tá na tabuli nie je. Preto prichádza do úvahy iba druhý prípad.
2. *dvojciferné + dvojciferné = dvojciferné*
   Pozrime sa na poslednú číslicu hľadaných čísel a vytvorme možné súčty:

súčet	ostali číslice	existuje súčet?	možnosti
$3+5=8$	4, 6, 9	Nie	
$3+6=9$	4, 5, 8	Nie	
$4+5=9$	3, 6, 8	Nie	
$4+9=13$	5, 6, 8	Nie	
$5+8=13$	4, 6, 9	Nie	
$5+9=14$	3, 6, 8	Nie	
$6+8=14$	3, 5, 9	Áno	$36+58=94,\quad 38+56=94,K$
$6+9=15$	3, 4, 8	Áno	$36+49=85,\quad 39+46=85,K$

Jurko mohol včera vytvoriť jeden z ôsmich vzorových príkladov:

$36+58=94,\quad 38+56=94,$

$58+36=94,\quad 56+38=94,$

$36+49=85,\quad 39+46=85,$

$49+36=85,\quad 46+39=85.$

Poznámka:

V tejto úlohe sú dve úskalia. Prvé je prechod cez desiatku a druhé množstvo možností. Deti majú nájsť a vypísať všetky možnosti, iba vtedy je úloha správne vyriešená.

Z4-I-4

Rodičia prvej slovenskej superstar K.K. sa starajú o jaskyňu „Zlá diera“. V jaskyni je tma, návštevníci si svietia karbidovými lampášikmi. Pre seba a pre pani učiteľku má pán Košč väčšiu lampičku. Lampášikov však mali len 9, preto sprievodca pán Košč zoradil našu skupinu ako husi tak, že tesne pred tým, kto nemal lampášik, išiel niekto s lampášikom alebo lampičkou. Prvý v zástupe bol on, posledná pani učiteľka s lampičkou. Lampášik niesli 4 chlapci, 4 dievčatá lampášik nedostali. Koľko dievčat bolo v našej skupine? Koľko tam bolo chlapcov? Poznámka: Nik neniesol dva lampášiky, a žiadni dvaja s lampášikmi nešli tesne za sebou. (Bednářová S.)

Riešenie:

Prvý bol pán Košč a za ním mohlo kráčať dieťa bez lampášika, potom dieťa s lampášikom opäť bez lampášika, s lampášikom, ... , bez lampášika a pani učiteľka s lampičkou. Ak lampášikov bolo 9, tak 10 detí lampášik nemalo. Celkovo bolo v jaskyni 19 detí. 4 lampášiky niesli chlapci a zvyšných 5 (do 9) museli niesť dievčatá. Dievčat bolo deväť – 4 bez lampášika a 5 s lampášikom. Chlapcov potom muselo byť 10.

Poznámka:

Ide o klasickú úlohu typu „medzery medzi latkami v plote“. Predpokladáme, že deti si situáciu nakreslia a odpovede vyčítajú z obrázka.

Z4-I-5

Sedem Snehulienkiných trpaslíkov bolo na hríboch. Prišli s košíčkami, v ktorých mali 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hríbov. Snehulienka im povedala, aby niektoré košíčky uložili do špajze, niektoré dali ku sporáku a ostatné položili na stôl tak, že všade malo byť rovnako veľa hríbov. Trpaslíci sa rozhodli, že hríby z košíčkov nebudú vyberať. Podarí sa im uložiť košíčky tak, ako to chcela Snehulienka? Nájdi aspoň jeden spôsob. (Ptáčková Š.)

Riešenie:

$34+19+50+44+31+28+37=243, \quad 243:3=81$

Spolu priniesli 243 hríbov a na každé miesto mali umiestniť po 81 hríbov.

$81=50+31=44+37=34+19+28$

Nakoľko sa košíček s 50 hríbmi dá skombinovať iba s košíčkom s 31 hríbmi (a 44 s 37), je rozdelenie košíčkov jednoznačné. Meniť sa môžu iba miesta, kam tieto košíčky trpaslíci uložia.

Jedna možnosť je:

50 a 31 hríbov ku sporáku, 44 a 37 hríbov na stôl a zvyšné tri košíčky do špajze.

Z4-I-6

Z čísla 1583719 vyškrtni tri číslice tak, aby vzniklo čo najväčšie číslo, ktorého každá číslica je nepárna. (Dillingerová M.)

Riešenie:

Z čísla treba určite vyškrtnúť číslicu 8.

Ostane nám číslo 153719 a ešte máme vyškrtnúť 2 číslice. Treba škrtať malé číslo stojace pred väčším a čo najviac vľavo. Vyškrtneme teda číslice 1 a 3.

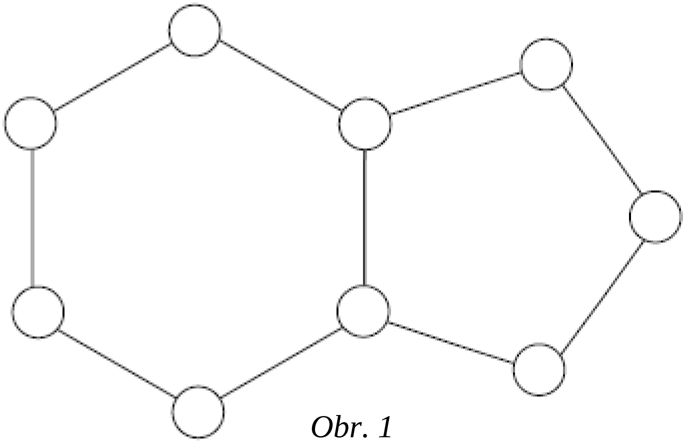
Výsledné číslo je 5719.

Poznámka:

Úloha je oveľa ťažšia, ak si žiak nevyškrtne dopredu číslicu 8. Teda podmienky treba zvažovať v opačnom poradí, než sú napísané.

Riešenia kategórie Z5

RNDr. M. Dillingerová, PhD.



Obr. 1

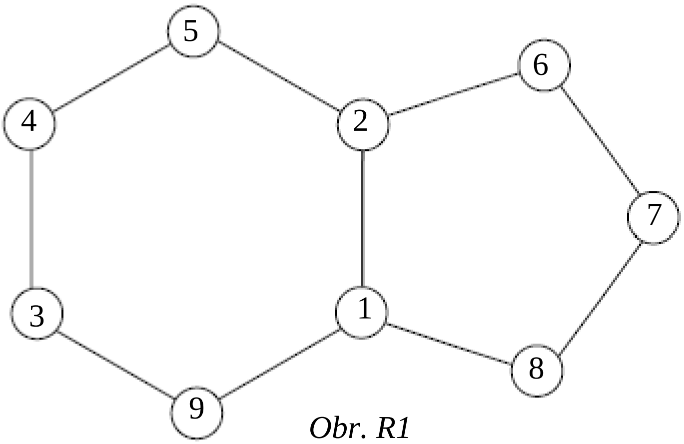
Z5-I-1

Na obrázku vidíš päťuholník a šesťuholník so spoločnou stranou. Doplň do krúžkov na tomto obrázku čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak, aby súčet čísel v šesťuholníku aj súčet čísel v päťuholníku bol 24. Každé číslo smieš použiť len raz. Stačí, keď nájdeš jedno riešenie.

(Hozová L.)

Riešenie:

Ak sčítame všetky dopĺňané čísla, dostaneme 45. $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$
Ale súčet čísel v šesťuholníku aj súčet čísel v päťuholníku má byť 24, čiže spolu 48. Tu sme započítali dve čísla dvojmo (spoločné pre 5- aj 6-uholník). Ich súčet je $48-45=3$, takže ide o čísla 1 a 2.
Teraz treba už len nájsť jedno vhodné doplnenie pre ostatné čísla. Napríklad:



Obr. R1

Z5-I-2

Cyklistického preteku *Krížom - krážom* sa zúčastnili šesťčlenné družstvá z celej Európy. Prvých desať etáp ešte zvládli všetci, ale v jedenástej etape po hromadnom páde odstúpilo 17 cyklistov. V každej ďalšej etape ich potom odstúpilo o troch menej ako v predošlej. Do cieľa poslednej, 15. etapy, došlo 53 cyklistov. Koľko družstiev sa

zúčastnilo preteku?
(Ptáčková Š.)

Riešenie:

Vypíšme si koľkí odstúpili v jednotlivých etapách:

11. etapa   17 cyklistov
12. etapa   14 cyklistov
13. etapa   11 cyklistov
14. etapa   8 cyklistov
15. etapa   5 cyklistov

Celkovo teda pretek začalo $53+5+8+11+14+17=108$ cyklistov, to je $108:6=18$ družstiev.

Z5-I-3

Tomáškova cvičená blcha Skákalka stála na ciferníku hodín na bodke pri čísle 12. Hrala sa s ním takúto hru: Tomáško hodil kockou a blcha skočila o toľko bodiek ďalej, koľko mu padlo na kocke. Ale po prvom hode skákala v smere pohybu hodinových ručičiek, po druhom proti smeru a po treťom opäť v smere pohybu hodinových ručičiek. Vieme, že Tomáško hodil dvojku, päťku a šestku, ale nevieme, v akom poradí mu padli.

a) Na bodke pri ktorom čísle mohla skončiť Skákalka po treťom skoku?
b) Na ktoré číslo sa blcha počas hry vôbec nemohla dostať?

Obr. 2

(Hozová L.)

Riešenie:

Hodiny si môžeme modelovať pomocou takejto tabuľky s číslami:

7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6

Na začiatku je Skákalka na farebne označenej dvanástke. Postupne budeme uvažovať ako mohli padnúť Tomáškovi čísla a zaznačovať, kam skočí blcha.

Poradie padnutých čísel	Bodky, kam blcha doskočila
2,5,6	2,9,3
2,6,5	2,8,1
5,2,6	5,3,9
5,6,2	5,11,1
6,2,5	6,4,9
6,5,2	6,1,3

7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6

V tabuľke ostali nezafarbené čísla 7 a 10. Na tie sa blcha nemohla nijako dostať.
Blcha mohla skončiť len na jednom z čísel 1, 3, 9.

Poznámka:

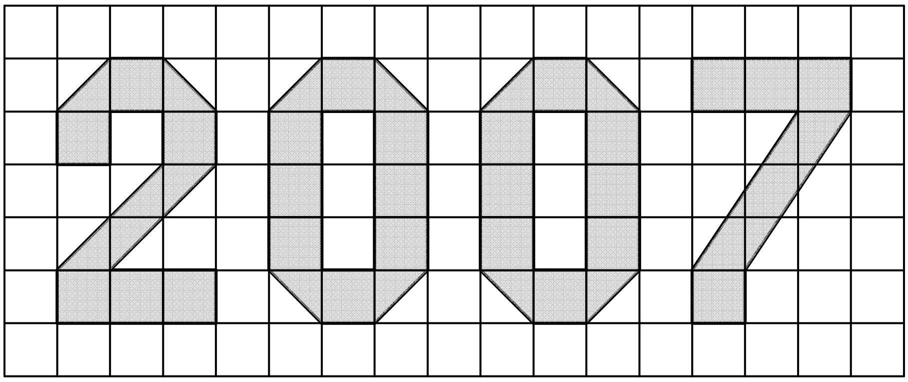
Ak žiaci uvedú medzi nedosažiteľné čísla aj dvanástku, je riešenie správne! Túto malú nejasnosť sme vzhľadom na dĺžku textu už nedodefinovávali.

Z5-I-4
Pomocou číslic 0 až 9 a dvoch desatinných čiarok utvor dve desatinné čísla tak, aby ich súčet bol čo najmenší. Nájdi všetky možnosti! (Každú číslicu treba použiť práve raz!)
(Bednářová S.)
Riešenie:
Aby bol súčet čo najmenší, mal by mať čo najviac desatinných miest. Na posledných nech sú potom tie najväčšie číslice. Aby sme dostali čo najviac desatinných miest, budeme tvoriť jedno číslo s veľa a jedno s málo desatinnými miestami. Celkovo máme k dispozícii 10 číslic. Keďže musíme použiť dve desatinné čiarky, musí mať to „kratšie“ číslo aspoň dve číslice. Jedna z nich je na mieste jednotiek, druhá na mieste desatín. Druhé číslo má tiež iba jednu číslicu na mieste jednotiek, ale sedem na desatinných miestach.
Chceme čo najmenší súčet, takže číslice na mieste jednotiek budú najmenšie možné a čím ďalej od desatinnej čiarky, tým väčšie môžu byť.
Riešenia sú štyri:

0,2	0,3	1,2	1,3
1,3456789	1,2456789	0,3456789	0,2456789
1,5456789	1,5456789	1,5456789	1,5456789

Z5-I-5
Sedem Snehulienkiných trpaslíkov bolo na hríboch. Prišli s košíčkami, v ktorých mali 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hríbov. Snehulienka im povedala, aby niektoré košíčky uložili do špajze, niektoré dali ku sporáku a ostatné položili na stôl tak, že všade malo byť rovnako veľa hríbov. Trpaslíci sa rozhodli, že hríby z košíčkov nebudú vyberať. Podarí sa im uložiť košíčky tak, ako to chcela Snehulienka? Nájdi aspoň jeden spôsob.
(Ptáčková Š.)
Riešenie:
$34 + 19 + 50 + 44 + 31 + 28 + 37 = 243, \quad 243 : 3 = 81$
Spolu priniesli 243 hríbov a na každé miesto mali umiestniť po 81 hríbov.
$81 = 50 + 31 = 44 + 37 = 34 + 19 + 28$
Nakoľko sa košíček s 50 hríbmi dá skombinovať iba s košíčkom s 31 hríbmi (a 44 s 37), je rozdelenie košíčkov jednoznačné. Meniť sa môžu iba miesta, kam tieto košíčky trpaslíci uložia.
Jedna možnosť je:
50 a 31 hríbov ku sporáku, 44 a 37 hríbov na stôl a zvyšné tri košíčky do špajze.

Z5-I-6
Na obrázku je v štvorčekovej sieti znázornené číslo 2007. Zisti obsah sivej časti obrázka, ak vieš, že strana každého malého štvorčeka meria 4 cm.
(Raabová M.)



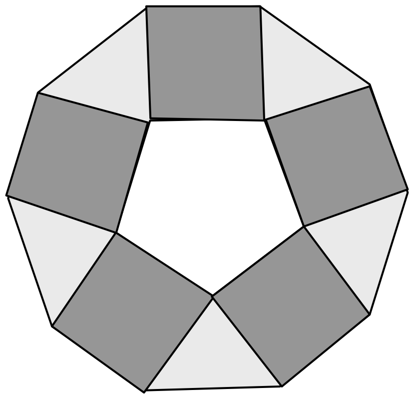
Obr. 3

Riešenie:
Ak strana štvorčeka má 4 cm, potom jeho obsah je $S = 4.4 = 16$ [cm^2].
Teraz stačí spočítať, koľko štvorčekov má nápis.
Číslica 2 obsahuje 9 štvorčekov, číslica 0 obsahuje 10 štvorčekov a číslica 7 obsahuje 7 štvorčekov. Spolu má nápis 36 štvorčekov.
$36.16 = 576$
Letopočet 2007 má obsah 576 cm^2.

Riešenia kategórie Z6
RNDr. Monika Dillingerová, PhD.

Z6-I-1
Lukáš natieral latkový plot. Každých 10 minút natrel 8 latiek. Jeho mladší brat Kubko mu chvíľku pomáhal. Za 7 minút natrel vždy 4 latky, takže Lukáš skončil o štvrť hodiny skôr, ako predpokladal. Ako dlho mu Kubko pomáhal?
(Raabová M.)
Riešenie:
Lukáš Za 1é minút natrie 8 latiek, takže 4 latky by natrel za 5 minút. Ak Kubko pomáhal Lukášovi, tak mu natretím každých štyroch latiek ušetril 5 minút práce. Celkovo Lukášovi ušetril 15 minút práce, takže natieral $15:5.4=3.4=12$ latiek a trvalo mu to $3.7=21$ minút. Kubko pomáhal Lukášovi 21 minút.

Z6-I-2
Zo zhodných rovnoramenných trojuholníkov a štvorcov sme zložili (bez prekrývania) útvar znázornený na obrázku číslo 1. Zisti veľkosti vnútorných uhlov týchto rovnoramenných trojuholníkov.
(Bednářová S.)



Obr. 1

Riešenie:
Súčet uhlov v desaťuholníku je $8.180°=1440°$.
Uhly nášho desaťuholníka sú tvorené vždy jedným pravým uhlom štvorca a jedným uhlom trojuholníka. Spomínané uhly trojuholníka musia byť všetky rovnaké, lebo ramená sú tvorené spoločnými stranami trojuholníkov a štvorcov, čiže ide o uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka. Označme ich α. Potom vieme, že

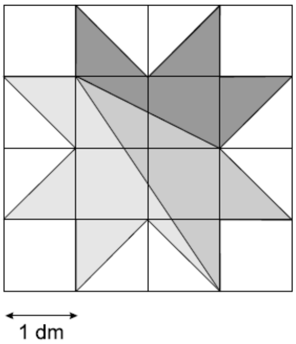
$$10.(90°+\alpha)=1440°$$
$$90°+\alpha=144°$$
$$\alpha=54°$$

Uhol pri hlavnom vrchole (β) už dopočítame na základe súčtu veľkostí uhlov trojuholníka.

$$2\alpha+\beta=180°$$
$$108°+\beta=180°$$
$$\beta=72°$$

Uhly trojuholníkov majú veľkosti: 54°, 54°, 72°.

Z6-I-3
Hviezda na obrázku číslo 2 v štvorcovej sieti je rozdelená dvomi úsečkami na tri časti. Zisti obsahy jednotlivých častí.



Obr. 2

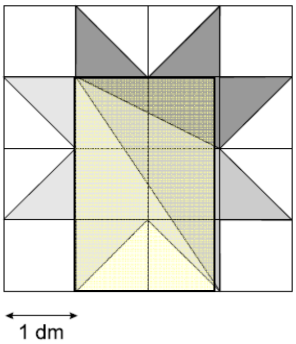
(Šimůnek L.)

Riešenie:

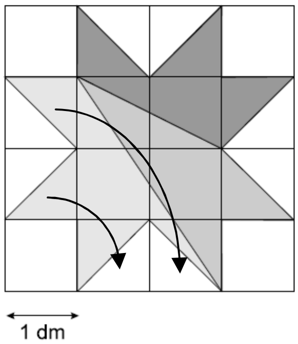
Postupne si z obrázka vyberieme tie časti, ktorých obsahy sa dajú ľahko spočítať.

V obrázku *R1* je vyznačený farebne obdĺžnik. V obrázku *R2* vidíme, že oba svetlosivé trojuholníky (ktoré boli mimo farebného obdĺžnika,) môžeme presunúť a svetlosivá časť sa stane polovicou farebného obdĺžnika. Obsah svetlosivej časti teda je

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 3\ \text{dm}^2.$$



Obr. R1



Obr. R2

V obrázku *R3* zase vidíme, že obsah tmavosivej časti pozostáva z troch polovíc štvorcov a polovice farebného obdĺžnika. Teda obsah tmavosivej časti je:

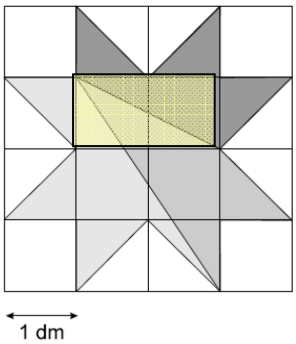
$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = \frac{5}{2} = 2{,}5\ \text{dm}^2.$$

Obsah strednesivej časti dostaneme ak od obsahu hviezdy odpočítame známe časti.

Hviezda pozostáva zo štyroch štvorčekov siete a 8 polovíc štvorčekov siete („cípy“):

$$S = 4 + 8\cdot\frac{1}{2} = 4 + 4 = 8\ \text{dm}^2.$$

Obsah strednesivej časti je $S_3 = 8 - 2{,}5 - 3 = 2{,}5\ \text{dm}^2$.



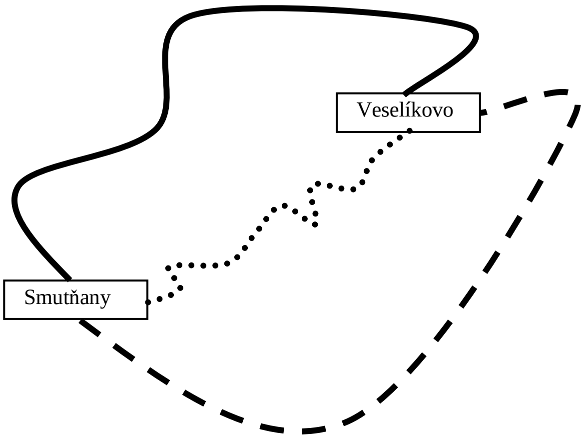
Obr. R3

Z6-I-4

Zo Smutňan do Veselíkova vedú tri cesty. (Pozri obrázok číslo 3.) Tá, ktorá je na mape vyznačená ako plná, meria 40 km, najvyššia povolená rýchlosť je na nej 80 km/h a vyberá sa na nej mýto 50 korún. „Bodkovaná“ cesta je dlhá 35 km, najvyššia povolená rýchlosť je na nej 60 km/h a mýtne je 150 korún. Na „čiarkovanej“ ceste, ktorá je dlhá 45 km sa vyberá mýto 100 korún a najvyššia povolená rýchlosť je 100 km/h. Ujo Ponáhľavý a teta Šporovlivá sa chcú dostať zo Smutňan do Veselíkova, ujo čo najskôr a teta čo najlacnejšie. Obaja si zavolali taxík. Šoféri taxíkov celú cestu idú maximálnou povolenou rýchlosťou a účtujú si 15 korún za jeden km cesty a zaplatené mýtne.

a) Ktorou cestou sa má vybrať taxikár uja Ponáhľavého?
b) Ktorou cestou sa má vybrať taxikár tety Šporovlivej?
c) O koľko minút menej bude trvať ujova cesta v porovnaní s tetinou?
d) O koľko korún viac zaplatí ujo ako teta?

(Bednářová S.)



Obr. 3

Riešenie:

Vyčíslime si časovú a finančnú náročnosť každej cesty.

cesta	vzdialenosť v km	rýchlosť v km/h	trvanie cesty v h	trvanie v min	mýtne v Sk	cena cesty v Sk
Plná	40	80	0,5	30	50	650
Bodkovaná	35	60	0,5833333	35	150	675
Čiarkovaná	45	100	0,45	27	100	775

V tabuľke sa počíta so vzorcami, ale dá sa to aj bez nich: Ak 80 km prejdem za hodinu, tak polovicu, 40 km, prejdem za pol hodiny, teda 30 minút... atď.

a) Taxikár uja Ponáhľavého má ísť po čiarkovanej ceste.
b) Taxikár tety Šporovlivej má ísť po plnej ceste.
c) Ujo zaplatí o 125 Sk viac ako teta.

Z6-I-5

Viacciferné číslo sa nazýva optimistické, ak jeho číslice zľava doprava rastú. Ak číslice čísla zľava doprava klesajú, hovoríme, že je to číslo pesimistické. Súčet sedemciferného pesimistického a sedemciferného optimistického čísla zloženého z tých istých číslic je 11001000. Ktoré číslice sme použili na zápis týchto dvoch čísel?

(Bednářová S.)

Riešenie:

Keď hľadáme čísla, ktoré vyhovujú zadaniu, musíme si uvedomiť, že pesimistické je vlastne zrkadlovým obrazom optimistického čísla. Ďalej budeme pracovať s prechodmi cez desiatku a postupne dopĺňať číslice čísla – vždy spredu a hneď aj zozadu.

	1						9
	9						1
1	1	0	0	1	0	0	0
	1	2				7	9
	9	7				2	1
1	1	0	0	1	0	0	0

	1	2	3		6	7	9
	9	7	6		3	2	1
1	1	0	0	1	0	0	0
	1	2	3	5	6	7	9
	9	7	6	5	3	2	1
1	1	0	0	1	0	0	0

Na zápis hľadaných čísel sme použili číslice 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9.

Z6-I-6

Naša trieda plánovala turistický výlet. Niektorí žiaci sa dohadovali o dĺžke jeho trasy a tvrdili, že je to 28, 16, 32, 37 a 15 km. Mýlili sa však o 5, 7, 8, 9 a 14 km. Aký dlhý bol výlet v skutočnosti?

(Volfová M.)

Riešenie:

O 14 km sa mohol pomýliť ten, kto plánoval najmenej, alebo ten, kto plánoval najviac.

Keby to bol ten, kto plánoval najmenej, bola by skutočná dĺžka trasy $15+14=29$ km. Potom by chyby odhadov boli v km takéto:

$29-28=1$

$29-16=13$

$32-29=3$

$37-29=8$

$29-15=14$

Takéto chyby neboli, takže o 14 sa musel pomýliť ten, kto odhadoval najviac.

Zároveň vieme, že odhadoval o 14 viac, ako bola skutočnosť. Dĺžka trasy by mal byť $37-14=23$ km.

Potom by chyby odhadov boli v km takéto:

$28-23=5$

$23-16=7$

$32-23=9$

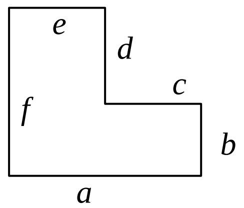
$37-23=14$

$23-15=8$

Výlet mal v skutočnosti 23 km.

Riešenia kategórie Z7
RNDr. M. Dillingerová, PhD.

Z7-I-1
Janka narysovala 6-uholník, ktorého dĺžky strán vyjadrené v cm sú celé čísla. Potom si uvedomila, že každé dve jeho susedné strany sú na seba kolmé. Zisti, ako mohol vyzerať Jankin 6-uholník, ak jeho obvod má byť 16 cm a jeho obsah má byť 12 cm^2. Narysuj obe možnosti.
(Dillingerová M.)
Riešenie:
Súčet veľkostí uhlov šesťuholníka je 720°. Keby všetky vnútorné uhly boli pravé, mali by sme iba $6.90° = 540°$. Ak bude 5 uhlov pravých a jeden väčší ako priamy, dostaneme $5.90° + 270° = 720°$. To znamená, že šesťuholník má tvar ako na obrázku R1.



Obr. R1

Označme dĺžky strán písmenami *a, b, c, d, e, f.* Z obrázka a vlastností šesťuholníka (kolmosť, obvod) vyplýva:
$a = c + e,\ f = b + d,\ a + b + c + d + e + f = 2.(a + f) = 16$.
Preto $a + f = 8$.
Z obsahu vieme, že $ef + bc = af - cd = 12$. (*)
Musíme si uvedomiť, že z rovnice (*) vyplýva aj, že $af > 12$ cm^2. Najprv si nájdeme všetky vhodné možnosti pre dĺžky *a, f*.
Vyjde nám :

a	3	4	5
f	5	4	3

Pre každú možnosť *a, f* hľadáme k nim vhodné celé čísla *c*, *d* (podľa (*)) a následne *b, e*.
Celkovo dostaneme tri šestice:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
5	2	3	1	2	3
4	2	2	2	2	4
3	2	1	3	2	5

Prvá a tretia sú rovnaké, takže riešenia sú práve dve a obe narysujeme.

		14	32		
43	102	11			90
22	18		301		7
	35		99	29	
12				62	

Z7-I-2
Rozdeľ obdĺžnik na obrázku, ktorý sa skladá z rovnakých štvorcov na čo najmenší počet zhodných častí tak, aby každá z nich obsahovala len také čísla, ktoré dávajú po delení tromi navzájom rôzne zvyšky. Pozor, rezať sa smie len po čiarach siete!
(Bednářová S.)

Riešenie:
Obdĺžnik sa skladá z 30 štvorcov. Zvyšky po delení 3 môžu byť 0, 1, 2. Nakreslíme si nový obdĺžnik v ktorom jednotlivé čísla zameníme ich zvyškami po delení tromi (Obr. R2). Najviac je tu dvojek, a to 6. Každá musí byť v inej časti. Preto je najmenej 6 častí a každá musí pozostávať z 5 štvorčekov. Jedno z možných rozdelení je na obrázku R2.

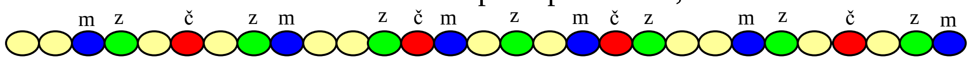
		2	2		
1	0	2			0
1	0		1		1
	2		0	2	
0				2	

Obr. R2

Z7-I-3
Urči počet zlomkov, ktorých hodnota je násobkom troch a čitateľ aj menovateľ sú trojciferné prirodzené čísla.
(Šimůnek L.)
Riešenie:
Čitateľ aj menovateľ sú prirodzené trojciferné čísla, teda hodnota zlomku je menšia ako 10. Aby zlomok predstavoval násobok troch, musí byť jeho hodnota 3, 6 alebo 9. Vezmime číslo 3 a pozrime sa koľko jeho trojciferných násobkov je trojciferné číslo.
$100.3 = 300, 101.3 = 303, 102.3 = 306, \ldots, 333.3 = 999$
Vyšlo nám teda zatiaľ $333 - 99 = 234$ zlomkov
$\frac{300}{100}, \frac{303}{101}, \frac{306}{102}, \frac{309}{103}, \ldots, \frac{999}{333}$.
Podobnú úvahu urobíme pre hodnoty 6 a 9.
$100.6 = 600, 101.6 = 606, 102.6 = 612, \ldots, 166.6 = 996$, čiže $166 - 99 = 67$ zlomkov.
$100.9 = 900, 101.9 = 909, 102.9 = 918, \ldots, 111.9 = 999$, čiže $111 - 99 = 12$ zlomkov.
Spolu existuje $234 + 67 + 12 = 313$ zlomkov daných vlastností.

Z7-I-4
Rozprávkový deduško niesol vrece zrna do mlyna. Po ceste mu zrno začalo z vreca vypadávať. Tri vtáčiky si všimli, že za deduškom ostáva cestička označená jednotlivými zrnkami. Prvý išiel zobať zrnká zelený vtáčik a zozobal každé štvrté zrnko ležiace na zemi. Potom priletel zobať červený vtáčik a zozobal každé piate na zemi ležiace zrnko. Nakoniec zlietol na cestičku modrý vtáčik a zozobal každé tretie na zemi ležiace zrnko. Koľko zrniek stratil deduško z vreca, ak vtáčiky zozobali spolu 79 zrniek?
(Dillingerová M.)
Riešenie:

Skúsme si nakresliť niekoľko zrniek a postupne farbiť, ktoré sú zozobané.



Obr. R3

z = zelená
m = modrá
č = červená

Všimnime si, že po dvadsiatich zrnkách sa situácia opakuje presne tak ako na začiatku. Teda ležia dve zrnká, ďalšie je zozobané modrým, potom zeleným vtáčikom, potom jedno leží... Pritom z každých 20 vytrúsených zrniek zozobú vtáčiky spolu 12 zrniek.

$79 : 12 = 6$ zvyšok 7

Ak zozobali po šiestej sérii dvanástich zrniek ešte 7, muselo byť vytrúsených šesť dvadsatíc a ešte 13 zrniek (pozri obrázok R3).

$6.20 + 13 = 120 + 13 = 133$

Deduško stratil 133 zrniek.

Z7-I-5

Troj- a viacciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi, pre ktorého žiadne tri za sebou idúce číslice *a*, *b*, *c* neplatí $a<b<c$ ani $a>b>c$, sa nazýva vlnité. Napíš

a) najväčšie vlnité číslo, ktoré nie je deliteľné 3,
b) najväčšie vlnité číslo deliteľné 150.

(Bednářová S.)

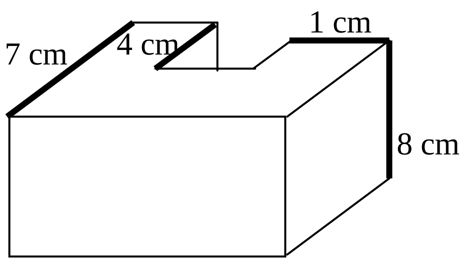
Riešenie:

Ak by sme použili všetky číslice od 0 do 9, získali by sme číslo s ciferným súčtom 45. Číslo by bolo deliteľné tromi.

a) Zo všetkých číslic musíme jednu vyškrtnúť. Vyberiem najmenšiu možnú, čiže jednotku. Z ostatných číslic zostavím vlnité číslo.
   978563402
b) Číslo je deliteľné 150, ak je deliteľné 3 aj 50. Takže musí končiť dvojčíslím 00 alebo 50 a jeho ciferný súčet musí byť deliteľný tromi. Aby číslo bolo čo najväčšie, použijeme všetky číslice. Odtiaľ ľahko dostaneme hľadané číslo 9784623150.

Z7-I-6

Osemboký kolmý hranol načrtnutý na obrázku vznikol zlepením troch kvádrov. Zisti objem a povrch tohto hranola, ak poznáš dĺžky vyznačených hrán a vieš, že z ôsmich jeho bočných stien sú vždy dve a dve zhodné.



(Bednářová S.)

Riešenie:

Na zistenie rozmerov bočných stien stačí pôdorys telesa (Obr. R4). Všetky bočné steny sú totiž obdĺžniky a jednu stranu majú 8 cm dlhú. Preto zisťujeme iba druhú dĺžku strany.

Zapíšme si, čo platí o dĺžkach strán:

$7 = 4 - c + d, \quad a + b + 1 = e$.

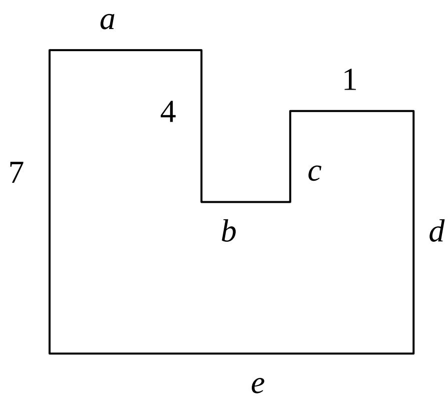
Pritom si všimnime, že $d > 3$. Dĺžka *d* môže byť 4 cm, 7 cm alebo neznáme číslo.

Tiež je zrejmé, že

$e > a$ a $e > b$ (*),

teda *e* sa nemôže zhodovať ani s *a* ani s *b*, dokonca musí byť viac ako 3 cm (Keby *a* aj *b* boli 1 cm).

1. $d = 4$ cm
   potom $c = 1$ cm. Ešte musím priradiť 7 cm. Jediné prichádzajúce do úvahy je *e*. Preto $e = 7$ cm, $a = 3$ cm, $b = 3$ cm.
2. $d = 7$ cm
   potom $c = 4$ cm. Ešte musím priradiť 1 cm a neznáme číslo. To nie je podľa podmienky (*) možné.
3. *d* je neznáme číslo. Potom je zrejmé, že *e* môže byť toto neznáme číslo, alebo 4 alebo 7 cm.
   a. ak *e* je neznáme číslo, musíme umiestniť čísla 1, 4, 7 k dĺžkam *a*, *b*, *c*. Pritom *c* už je jednoznačne dané $c = 7$ cm. Odtiaľ $d = e = 10$ cm. Nastal spor s $a + b + 1 = e$.
   b. ak $e = 7$ cm je riešenie v bode 1
   c. ak $e = 4$ cm, potom neznáme číslo je 2 (cm). Bez ohľadu na umiestnenie zvyšných čísel nemáme čo priradiť dĺžke *d*.



Obr. R4

Takže existuje jediný hranol, spĺňajúci podmienky zadania.
Jeho objem *V* a povrch *S* vypočítame:

$$V = 4.1.8 + 3.3.8 + 3.7.8 = 272 \text{ cm}^3$$

$$S = (7 + 4 + 1 + 3).2.8 + (4.1 + 3.3 + 3.7).2 = 308 \text{ cm}^2.$$

Riešenia kategórie Z8
RNDr. M. Dillingerová, PhD.

Z8-I-1

Z číslic 1 až 9 sme utvorili tri zmiešané čísla $a\frac{b}{c}$. Potom sme tieto tri čísla správne sčítali. Aký najmenší súčet sme mohli dostať?
(Každú číslicu sme použili práve raz!)
(Bednářová S.)

Riešenie:

Uvažujme len o celej časti čísel. Tá by mohla byť ľubovoľné jednociferné číslo. Ak však vezmeme čísla 1, 2, 3, tak ich súčet je 6 a súčet k nim prislúchajúcich zlomkov je určite menej ako 3. Teda celkový súčet hľadaných zmiešaných čísel by mal vyjsť menší ako 9.
Preto má zmysel uvažovať o troch možnostiach pre celé časti:

I. 1, 2, 3 – súčet 6
II. 1, 2, 4 – súčet 7
III. 1, 3, 4 – súčet 8

Každá iná možnosť už dá súčet (iba celých častí) väčší alebo rovný deviatim. Z našej úvahy je však zrejmé, že minimum je určite menšie ako 9.
Teraz treba vyskúšať pre jednotlivé možnosti celých častí doplnenie zlomkov. Pritom musí platiť, že každý zlomok je menší ako 1.
I. Zlomky tvoríme z číslic 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Prvý zlomok	Druhý zlomok	Tretí zlomok	Súčet zlomkov
$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{313}{168} \doteq 1{,}863$
$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{473}{252} \doteq 1{,}876$
$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{289}{126} \doteq 2{,}294$
$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{79}{42} \doteq 1{,}881$
$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{241}{126} \doteq 1{,}913$
$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{9}$	$\doteq 2{,}111$
$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\doteq 1{,}909$
$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{7}$	$\doteq 1{,}927$
$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	$\doteq 2{,}153$
$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{8}{9}$	$\doteq 2{,}270$
$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\doteq 2{,}069$

$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{8}$	$\doteq 2{,}097$
$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{9}$	$\doteq 2{,}546$
$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\doteq 2{,}328$
$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{8}$	$\doteq 2{,}342$

Najmenší súčet je v prvom riadku tabuľky. Tu je vidieť, že minimum sa dosiahlo, ak boli rozdiely medzi čitateľmi a menovateľmi rovnomerné. Toto sa budeme snažiť aplikovať aj v ďalších prípadoch. Celkový zatiaľ najmenší súčet je $6+\frac{313}{168}\doteq 7{,}863$.

To znamená, že v druhom prípade by súčet zlomkov musel byť menší ako $0{,}863$ a tretí prípad už nie je potrebné riešiť.

II. Zlomky tvoríme z číslic 3, 5, 6, 7, 8, 9.

Prvý zlomok	Druhý zlomok	Tretí zlomok	Súčet zlomkov
$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\doteq 1{,}720$
$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\doteq 1{,}756$
$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\doteq 1{,}798$

Tu sme nedostali menší súčet.

Najmenší možný súčet teda je $6+\frac{313}{168}=\frac{1321}{168}$.

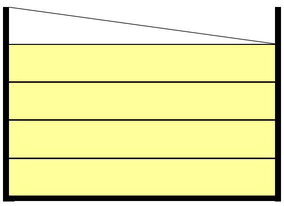
Z8-I-2

Pán kráľ si dal naliať plnú čašu vína. Pätinu vína z nej odpil. Potom si nechal čašu doplniť vodou a odpil štvrtinu objemu. Opäť mu ju doliali vodou a kráľ odpil tretinu. Nakoniec čašu ešte raz doliali vodou doplna. Koľko percent objemu čaše tvorí pôvodné víno?

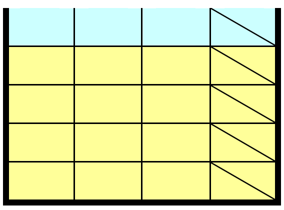
(Krejčová M.)

Riešenie:

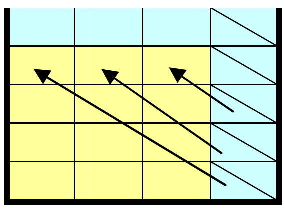
Najjednoduchšie riešenie sa zdá byť riešenie obrázkové. Jednotlivé odpíjania a dolievania zaznačíme postupne do obrázkov.



Obr. R1

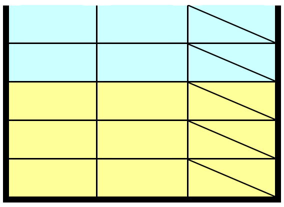


Obr. R2

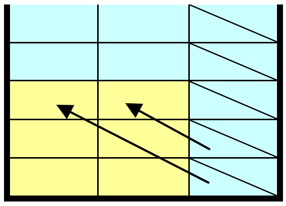


Obr. R3

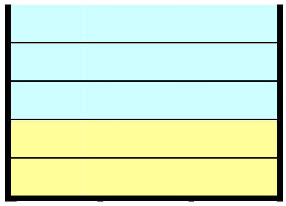
Na prvom obrázku je znázornené, že kráľ odpil pätinu (preškrtnuté políčko) a v čaši ostali štyri pätiny vína – žltá farba. Na druhom obrázku potom kráľ odpil štvrtinu zmesi. Teda škrtnutá štvrtina musí obsahovať jeden diel vody – modrá farba, a štyri diely vína. Týchto päť dielov sa opäť doleje vodou (obr. R3).



Obr. R4



Obr. R5



Obr. R6

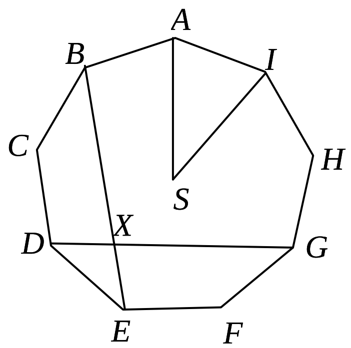
To znamená, že vína už bude iba tri pätiny a vody dve pätiny. Na štvrtom obrázku je preškrtnutá vypitá tretina zmesi obsahujúca dva diely vody a tri diely vína. Preškrtnuté diely sa nahradia vodou. Koncový stav potom ukazuje šiesty obrázok.

Vody sú tri diely a vína iba dva diely. Pôvodné víno tvorí $\frac{2}{5} = 40\%$ objemu čaše.

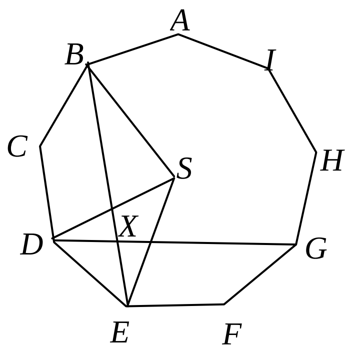
Z8-I-3

Je daný pravidelný deväťuholník *ABCDEFGHI*. Vypočítajte veľkosť uhla, ktorý zvierajú priamky *DG* a *BE*.
(Krejčová M., Raabová M.)

Riešenie:



Obr. R7a



Obr. R7b

Nech *S* je stred deväťuholníka a *X* je priesečník uhlopriečok *BE* a *DG*.
Na obrázku *R7a* je zobrazená situácia zo zadania. Pre pravidelný deväťuholník pritom platí, že uhol *ASI* má veľkosť $360° : 9 = 40°$.
Teraz prejdime k ilustračnému obrázku *R7b*. Veľkosť uhla *DSE* je 40° a trojuholník *DSE* je rovnoramenný s ramenami *DS* a *SE*. Preto (zo súčtu veľkostí uhlov v trojuholníku) je $|\measuredangle\ SDE| = |\measuredangle\ SED| = 70°$.

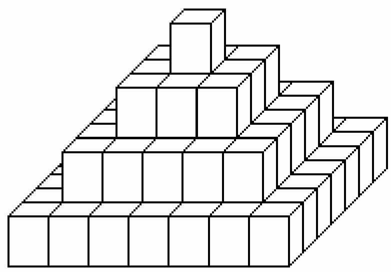
Trojuholník *BSE* je tiež rovnoramenný s ramenami *BS* a *SE*. Pritom $|\measuredangle\ BSE| = 120°$ a $|\measuredangle\ SBE| = |\measuredangle\ SEB| = 30°$. Potom ale $|\measuredangle\ XDE| = |\measuredangle\ XED| = 70° - 30° = 40°$.

Následne z trojuholníka *DEX* vypočítame veľkosť uhla *DXE*:
$|\measuredangle\ DXE| = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$

Ešte si treba uvedomiť, že uhol dvoch úsečiek je vždy ostrý alebo pravý, takže uhol úsečiek *BE* a *DG* má 80°.

Z8-I-4

Žiaci postavili z množstva rovnakých kociek pyramídu, ktorej časť vidíte na obrázku. Pyramída,



Obr. 1

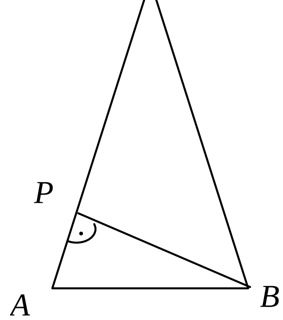
svojho druhu najväčšia na svete, stála od tej doby na školskom dvore a pršalo na ňu. Po čase sa museli všetky kocky, na ktoré pršalo, teda tie na povrchu, vymeniť. Vymenilo sa celkom 2 025 kociek. Koľko mala pyramída vodorovných vrstiev?
(Šimůnek L.)
Riešenie:
Ak sa na pyramídu pozrieme zhora, vidíme všetky kocky, na ktoré pršalo. Pri takomto pohľade sú umiestnené do štvorca. Jeho základňa má stranu tvorenú $\sqrt{2025} = 45$ kockami.
Poschodia vznikajú tak, že pri pristavovaní navrch sa postaví štvorec so stranou zmenšenou o dve kocky.
Čiže strany štvorcov majú postupne 45, potom 43, 41, 39,...,1 kocku. To je $\left(45+1\right):2=23$ štvorcov, a teda 23 poschodí.

Z8-I-5

Na lúke sa pásli ovce. Tých s rohami bolo dvakrát menej ako tých bez rohov. Tých s tmavým kožúškom bolo toľko ako tých so svetlým kožúškom. (Iné ovce, jednorohé, fľakaté a pod., sa na lúke nepásli.) Iba tri tmavé ovečky nemali rohy a svetlé vôbec nemali rohy. Koľko sa páslo ovečiek na lúke?
(Dillingerová M.)
Riešenie:
Označme:
rohaté...r
bez rohov...b
svetlé...s
tmavé...t
Potom môžeme matematizovať situáciu nasledovne:
$2r = b$
$s = t$
$s + t = r + b$
$s + 3 = b$
Ak do tretej a štvrtej rovnice dosadíme za b a t výrazy z prvých dvoch rovníc, získame sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych.
$2s = 3r$
$s + 3 = 2r$
Z druhej rovnice dosaďme za s do prvej:
$4r - 6 = 3r \quad \Rightarrow \quad r = 6$
Takže rohatých je 6, bez rohov je 12. Celkovo bolo na lúke 18 ovečiek.
(Úloha sa dá riešiť aj úvahou bez sústavy rovníc!)

Z8-I-6

Výška rovnoramenného trojuholníka ABC delí tento trojuholník na dve časti, ktorých obsahy sú v pomere 1:3. Určte obsah a obvod trojuholníka ABC, ak viete, že $|AC| = |BC|$ a $|AB| = \sqrt{32}$ cm.
(Hozová L.)
Riešenie:
V prvom rade si treba uvedomiť, že ide o výšku na stranu AC alebo BC. Bez ujmy na všeobecnosti



Obr. R8

môžeme počítať s tým, že to je výška na stranu AC a budeme ju označovať iba v.
Obsah trojuholníka ABP je teda tretinou obsahu trojuholníka BPC. Nakoľko majú oba trojuholníky spoločnú výšku, musí platiť $|PC| = 3.|AP|$.

Označme $|AP| = x$ a $|AB| = c = \sqrt{32}$.

Potom pre pravouhlé trojuholníky ABP a BPC platí Pytagorova veta:

$$\begin{array}{l} x^2 + v^2 = c^2 \\ (3x)^2 + v^2 = (4x)^2 \end{array} \text{ ,čiže po dosadení } \sqrt{32} \text{ za } c \quad \begin{array}{l} x^2 + v^2 = 32 \\ 9x^2 + v^2 = 16x^2 \end{array}.$$

Z prvej rovnice si vyjadríme $v^2 = 32 - x^2$ a dosadíme do druhej.

$$9x^2 + 32 - x^2 = 16x^2$$

Po úprave dostaneme:

$$8x^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \wedge \quad v = 2\sqrt{7}$$

Obsah trojuholníka je $S = \dfrac{4x.v}{2} = 8.\sqrt{7}$ [cm^2].

Obvod trojuholníka je $o = 4x + 4x + c = 16 + \sqrt{32}$ [cm].

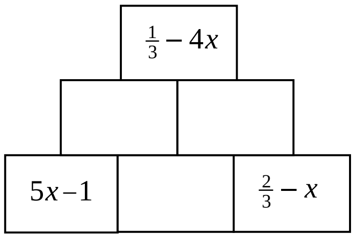
Riešenia kategórie Z9
RNDr. M. Dillingerová, PhD.

Z9-I-1
Zistite, koľko je takých šesťciferných čísel, ktoré majú ciferný súčin 750?
(Tlustý P.)
Riešenie:
Základom úlohy je rozklad čísla 750 na prvočinitele.
$750 = 2.3.5.5.5$
Z tohto rozkladu sa dá vytvoriť 6 cifier iba ak použijeme aspoň jednu jednotku.
I. Ak použijeme čísla 1, 2, 3, 5, 5, 5, vznikne $\frac{6!}{3!} = 120$ rôznych čísel.

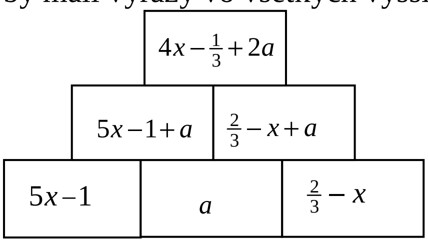
II. Ak použijeme čísla 1, 1, 6, 5, 5, 5, vznikne $\frac{6!}{3!.2!} = 60$ rôznych čísiel.

Celkovo je 180 takých čísel.

Z9-I-2
V sčítacej pyramíde sa na každej tehličke (okrem tých z najspodnejšieho riadku) nachádza súčet toho, čo je napísané na dvoch s ňou susediacich tehličkách z nižšieho riadku. Doplňte na prázdne tehličky sčítacej pyramídy znázornenej na obrázku chýbajúce výrazy.
(Bednářová S.)



Riešenie:
Skúsme si do spodného prostredného políčka doplniť neznámu *a* a dopočítať aký tvar by mali výrazy vo všetkých vyšších políčkach.



V tomto prípade sme dostali novú „najvrchnejšiu" tehličku. Z rovnosti obsahov týchto tehličiek vyjadríme neznámu *a* pomocou *x*.

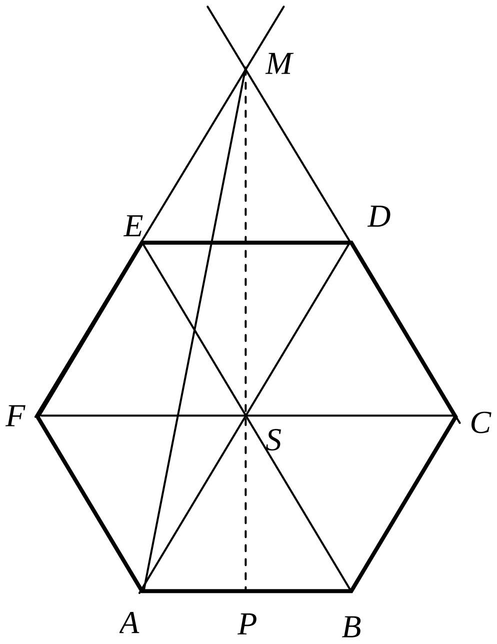
$$4x - \tfrac{1}{3} + 2a = \tfrac{1}{3} - 4x$$
$$8x - \tfrac{2}{3} = -2a$$
$$a = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} - 4x}}$$

A následne dopočítame výrazy, ktoré majú byť doplnené do tehličiek v strednom rade.
vľavo: $5x - 1 + a = 5x - 1 + \frac{1}{3} - 4x = \underline{\underline{x - \frac{2}{3}}}$

vpravo: $\frac{2}{3} - x + a = \frac{2}{3} - x + \frac{1}{3} - 4x = \underline{\underline{1 - 5x}}$

Z9-I-3
Do kružnice s polomerom 2 cm je vpísaný pravidelný šesťuholník *ABCDEF*. Priesečník priamok *FE* a *CD* označme *M*. Vypočítajte dĺžku úsečky *AM*.
(Volfová M.)

Riešenie:



Obr. R1

V obrázku *R1* vidíme, že hľadaná dĺžka je dĺžkou prepony pravouhlého trojuholníka *APM*. Pritom odvesna *AP* je polovicou strany šesťuholníka, čiže $|AP| = 1$ [cm].

Odvesna *PM* je trojnásobkom výšky rovnostranného trojuholníka *ABS*, lebo $\Delta ABS \cong \Delta DES \cong \Delta DEM$.
výška trojuholníka *ABS* je

$v = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ [cm].

Teraz už ľahko dopočítame dĺžku *AM*.

$$|AM|^2 = |AP|^2 + |PM|^2$$

$$|AM|^2 = 1^2 + \left(3.\sqrt{3}\right)^2$$

$$|AM|^2 = 1 + 9.3$$

$$|AM|^2 = 28$$

$$|AM| = 2.\sqrt{7}\ [\mathrm{cm}]$$

Z9-I-4

Matematickej súťaže sa zúčastnilo 142 žiakov. Po skončení súťaže autor zistil, že priemerný počet bodov udelených za tretiu úlohu pripadajúci na jedného súťažiaceho je 2,7 (zaokrúhlené na desatiny). Nie každý súťažiaci však tretiu úlohu odovzdal, takže priemerný počet bodov udelených za tretiu úlohu pripadajúci na jedno odovzdané riešenie bol 3,9 (zaokrúhlené na desatiny). Koľko súťažiacich mohlo odovzdať tretiu úlohu?

Poznámka: Udeľovali sa len celé body, neodovzdaná úloha bola hodnotená 0 bodmi.

(Šimůnek L.)

Riešenie:

Keďže sa zaokrúhľovalo na celé desatiny, mohlo byť výsledné číslo z intervalu $[2{,}65; 2{,}75)$ (zľava uzavretý). Ak hranice vynásobíme počtom účastníkov, dostaneme, z akého intervalu mohol byť celkový počet bodov.

$142.2{,}65 = 376{,}3 \quad 142.2{,}75 = 390{,}5$

Celkový počet získaných bodov teda mohol byť 377, 378, 379, ..., 390.

Druhý uvedený priemer je číslo z intervalu: $[3{,}85; 3{,}95)$.

Najväčší možný počet získame ako dolnú celú časť podielu maxima bodov a minimálneho priemeru.

$390 : 3{,}85 = 101{,}2987013$

Najmenší možný počet získame ako hornú celú časť podielu minima bodov a maximálneho priemeru.

$377 : 3{,}95 = 95{,}44303797$

Teda tretiu úlohu mohlo odovzdať najmenej 96 a najviac 101 súťažiacich.

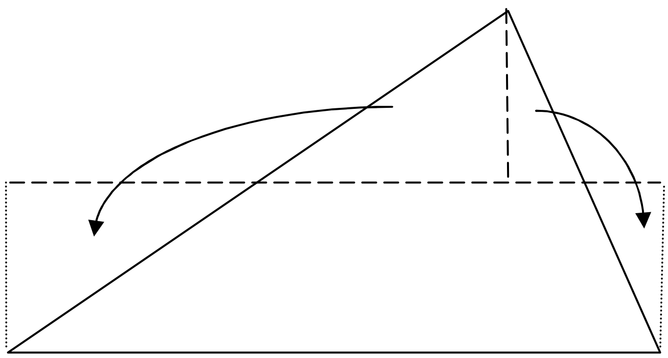
Z9-I-5

Trojuholník *REZ* s obsahom 300 cm^2, stranou *RE* dĺžky 25 cm a stranou *ZE* dĺžky 30 cm sme dvomi priamymi rezmi rozdelili na 3 časti a z týchto častí zložili (bez prekrývania) obdĺžnik. Aké rozmery mohol mať tento obdĺžnik? Nájdite všetky možnosti.
(Bednářová S.)

Riešenie:
Najprv treba zistiť, ako vyzerá trojuholník *REZ*. Z obsahu a strany sa dá vypočítať výška na príslušnú stranu.

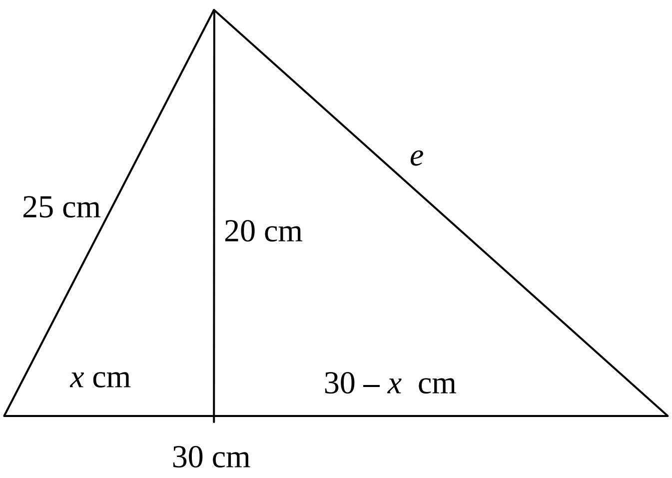
$300 = \frac{1}{2} \cdot v_r \cdot 30$ $300 = \frac{1}{2} \cdot v_z \cdot 25$

$v_r = 20 \quad [\text{cm}]$ $v_z = 24 \quad [\text{cm}]$



Obr. R2

Jeden základný princíp rezania je na obrázku *R2*. Najprv použijeme strednú priečku a potom zmenšený trojuholník rozdelíme výškou (na pôvodnú strednú priečku). Pritom výsledný obdĺžnik bude mať jednu stranu (a) rovnako dlhú ako je strana pôvodného trojuholníka a druhá (b) je polovicou príslušnej výšky.
Dva výsledné obdĺžniky teda už vieme:
1. $a = 30$ cm, $b = 10$ cm
2. $a = 25$ cm, $b = 12$ cm



Obr. R3

Pre doplnenie tretej možnosti treba zistiť dĺžku strany *RZ*. Postupujeme podľa obrázka *R3*.

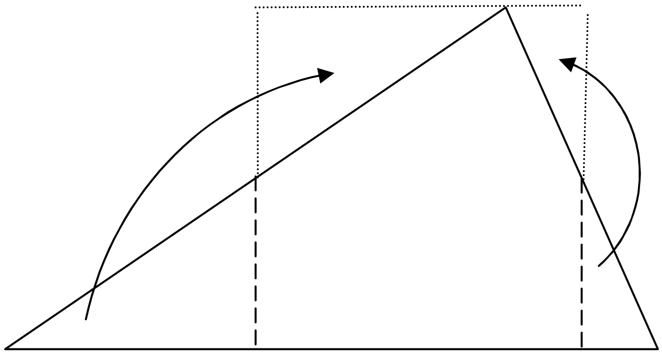
$x^2 = 25^2 - 20^2$

$x = 15$

$e^2 = 20^2 + 15^2$

$e = 25$

Nakoľko je trojuholník *REZ* rovnoramenný, pri treťom rezaní by sme nedostali nový výsledok.



Obr. R4

Druhý základný princíp rezania je na obrázku *R4*. Body v ktorých spúšťame kolmice na jednu stranu trojuholníka sú stredmi strán. Pritom výsledný obdĺžnik bude mať jednu stranu (a) rovnako dlhú ako je výška trojuholníka a druhá (b) je polovicou príslušnej strany.
Druhé dva výsledné obdĺžniky budú mať rozmery:
3. $a = 20$ cm, $b = 15$ cm
4. $a = 24$ cm, $b = 12{,}5$ cm
Úloha má štyri riešenia.

Z9-I-6
Ukážte, že číslo
$$(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot K \cdot 2003 \cdot 2005) + (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot K \cdot 2004 \cdot 2006)$$
je deliteľné číslom 2007^4.
(Tlustý P.)
Riešenie:
$2007^4 = 3^8 . 223^4$, kde 223 je prvočíslo.
Ak by sme ukázali, že každý zo sčítancov je deliteľný číslom 2007^4, bol by aj súčet deliteľný číslom 2007^4.
Vyberme z prvého sčítanca čísla deliteľné 3 a 223. Sú to: 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, ... a 223, 669, 1115, 1561...
$3 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 21 \cdot 27 = 3^8 \cdot 5 \cdot 7$ a $223 \cdot 669 \cdot 1115 \cdot 1561 = 223^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, čiže prvý sčítanec je určite deliteľný číslom 2007^4.
Vyberme z druhého sčítanca čísla deliteľné 3 a 223. Sú to: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ... a 446, 892, 1338, 1784.
$6 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 24 \cdot 30 \cdot 36 = 3^8 \cdot 5 \cdot 2^{10}$ a $446 \cdot 892 \cdot 1338 \cdot 1784 = 223^4 \cdot 3 \cdot 2^7$, čiže druhý sčítanec je tiež určite deliteľný číslom 2007^4.
Z toho vyplýva že číslo
$$(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot K \cdot 2003 \cdot 2005) + (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot K \cdot 2004 \cdot 2006)$$
je deliteľné číslom 2007^4.

56. ročník Matematickej olympiády
Komentáre pre kategórie Z4 - Z9

Vydala IUVENTA s finančnou podporou MŠ SR

Zodpovedný redaktor: RNDr. Monika Dillingerová
Recenzent: Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.