

1. Zistite, aký je najmenší možný obsah trojuholníka ABC , ktorého výšky spĺňajú nerovnosti $v_a \geq 3$ cm, $v_b \geq 4$ cm, $v_c \geq 5$ cm.

(Pavel Novotný)

Riešenie. Označme a, b, c veľkosti strán trojuholníka ABC . Pre jeho výšku v_b platí nerovnosť

$$c \geq v_b,$$

pretože v_b je dĺžka najkratšej úsečky spájajúcej vrchol B s bodom priamky AC . Pre obsah S trojuholníka ABC tak platí

$$S = \frac{cv_c}{2} \geq \frac{v_b v_c}{2} \geq 10 \text{ cm}^2.$$

Ak existuje trojuholník ABC vyhovujúci podmienkam úlohy, ktorého obsah je práve 10 cm^2 , potom v oboch nerovnostiach $S = \frac{1}{2}cv_c \geq \frac{1}{2}v_b v_c \geq 10 \text{ cm}^2$ nastáva rovnosť. Vychádza teda $c = v_b = 4$ cm a súčasne $v_c = 5$ cm. Z prvej rovnosti vyplýva, že taký trojuholník musí byť pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A . Pre dĺžku jeho odvesny AC teda platí $b = v_c = 5$ cm a dĺžka a jeho prepony BC je rovná $\sqrt{41}$ cm. Zo vzorca $S = \frac{1}{2}av_a$ pre jeho výšku v_a vyplýva

$$v_a = \frac{2S}{a} = \frac{20}{\sqrt{41}} \text{ cm} > 3 \text{ cm}.$$

Pravouhlý trojuholník ABC s odvesnami $b = 5$ cm a $c = 4$ cm teda vyhovuje podmienkam úlohy.

Najmenší možný obsah trojuholníka ABC , ktorého výšky vyhovujú podmienkam úlohy, je 10 cm^2 .

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, pritom 4 body dajte za dôkaz nerovnosti $S \geq 10 \text{ cm}^2$ a zostávajúce 2 body za uvedenie príkladu vyhovujúceho trojuholníku ABC s obsahom 10 cm^2 . Zrejme nerovnosti typu $b \geq v_c$ (rovnako dobrý odhad dostaneme aj z tejto nerovnosti) nie je nutné dokazovať, ani nie je nutné zdôvodňovať, kedy v nich nastane rovnosť.

2. Nech a, b sú reálne čísla. Ak má rovnica

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$$

dva rôzne reálne korene také, že ich súčet sa rovná ich súčinu, tak platí $a + b > 0$ a pritom daná rovnica nemá žiadne iné reálne korene. Dokážte.

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Predpokladajme, že rovnica

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0 \tag{1}$$

má dva rôzne reálne korene x_1 a x_2 , pre ktoré platí $x_1 + x_2 = x_1 x_2 = p$. Potom polynóm na jej ľavej strane je deliteľný polynómom $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - px + p$ a má rozklad

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = (x^2 - px + p)(x^2 + rx + s),$$

pričom r a s sú reálne čísla. Roznásobením výrazu na pravej strane poslednej rovnosti a porovnaním koeficientov pri jednotlivých mocninách x polynómov na oboch stranách dostaneme

$$-4 = -p + r, \quad (2)$$

$$4 = p + s - pr, \quad (3)$$

$$a = -ps + pr, \quad (4)$$

$$b = ps. \quad (5)$$

Zo vzťahu (2) vyplýva

$$r = p - 4. \quad (6)$$

Dosadením za r do vzťahu (3) dostaneme

$$s = 4 - p + p(p - 4) = (p - 4)(p - 1). \quad (7)$$

Keďže kvadratická rovnica $x^2 - px + p = 0$ má dva rôzne reálne korene x_1 a x_2 , je jej diskriminant kladné číslo, takže

$$p^2 - 4p > 0. \quad (8)$$

Keď sčítame rovnice (4) a (5) a dosadíme za r podľa (6), vyjde podľa predchádzajúceho vzťahu

$$a + b = pr = p(p - 4) = p^2 - 4p > 0,$$

čo sme chceli dokázať.

Pre diskriminant D rovnice

$$x^2 + rx + s = 0$$

podľa vzťahov (6), (7) a (8) platí

$$D = r^2 - 4s = (p - 4)^2 - 4(p - 4)(p - 1) = -3p(p - 4) = -3(p^2 - 4p) < 0.$$

Rovnica teda nemá reálne korene. Daná rovnice (1) preto nemá iné reálne korene ako x_1 a x_2 .

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, pritom 2 body dajte za správny rozklad polynómu na ľavej strane rovnice na súčin dvoch polynómov stupňa 2 a porovnanie ich koeficientov, t.j. za správne uvedenie vzťahov (2), (3), (4), (5). Ďalšie 2 body dajte za dôkaz nerovnosti $a + b > 0$ a zostávajúce 2 body za dôkaz neexistencie ďalších koreňov danej rovnice.

3. Nech M je ľubovoľný vnútorný bod prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC . Označme S , S_1 , S_2 stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom ABC , AMC , BMC .

- Dokážte, že body M , C , S_1 , S_2 a S ležia na jednej kružnici.
- Pre ktorú polohu bodu M má táto kružnica najmenší polomer?

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Označme postupne α a β veľkosti vnútorných uhlov pri vrchoch A a B uvažovaného pravouhlého trojuholníka ABC .

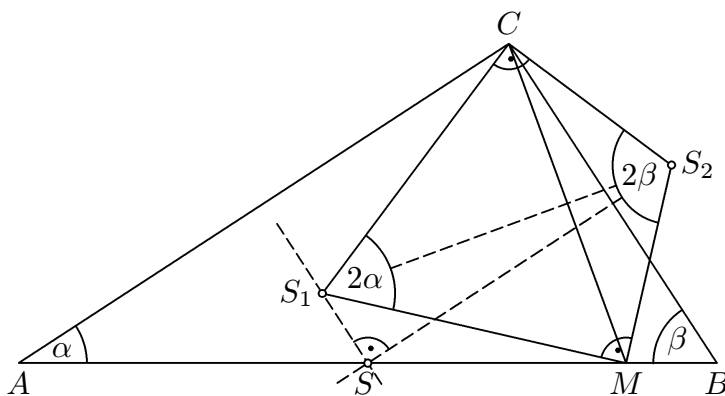
a) Zo vzťahu medzi obvodovým a stredovým uhlom pre spoločnú tetivu CM kružníc k_1 a k_2 opísaných postupne trojuholníkom AMC a BMC vyplýva (obr. 1)

$$|\sphericalangle MS_1C| + |\sphericalangle MS_2C| = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

Štvoruholník CS_1MS_2 je teda tetivový. Keďže body M a C sú súmerne združené podľa osi úsečky CM , na ktorej súčasne leží úsečka S_1S_2 , platí ďalej

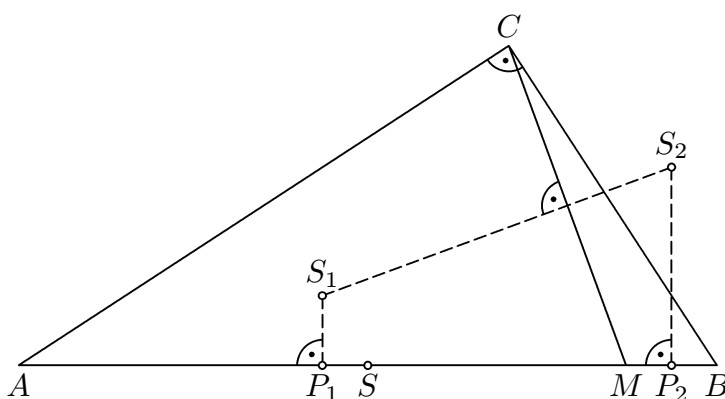
$$|\sphericalangle S_1MS_2| = |\sphericalangle S_1CS_2| = 90^\circ.$$

Kružnica opísaná štvoruholníku CS_1MS_2 je teda Tálesovou kružnicou zostrojenou nad priemerom S_1S_2 . Body S a S_1 však ležia súčasne na osi odvesny AC , podobne body S a S_2 ležia na osi odvesny BC uvažovaného trojuholníka. Takže $|\sphericalangle S_1SS_2| = 90^\circ$ a bod S leží tiež na Tálesovej kružnici opísanej štvoruholníku CS_1MS_2 . (Ak $M = S$, platí toto tvrdenie triviálne.) Tým je dokázaná časť a).



Obr. 1

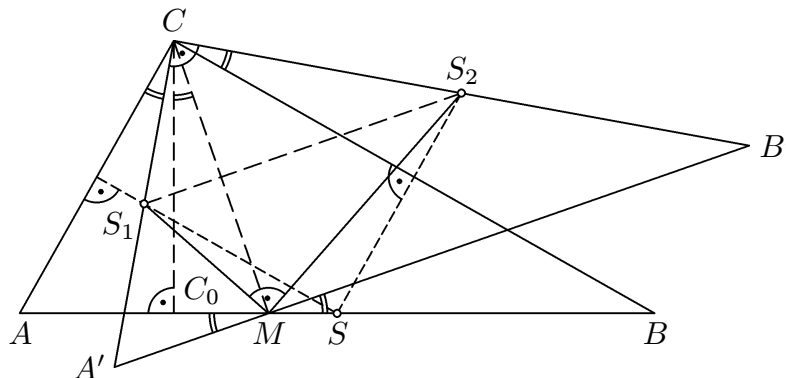
b) Označme P_1 a P_2 postupne stredy úsečiek AM a BM (obr. 2). Platí $|S_1S_2| \geq |P_1P_2| = \frac{1}{2}|AB|$. Kružnica opísaná štvoruholníku CS_1MS_2 má preto najmenší



Obr. 2

priemer $\frac{1}{2}|AB|$ práve vtedy, keď $S_1S_2 \parallel AB$, čo vzhľadom na kolmosť úsečky CM a jej osi S_1S_2 nastane práve vtedy, keď M je päťou výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC . (Polomer r tejto kružnice má potom veľkosť $r = \frac{1}{4}|AB|$.)

Iné riešenie. Označme C_0 päť výšky z vrcholu C a uvažujme podobné zobrazenie zložené z otočenia o uhol $\varphi = |\sphericalangle C_0CM|$ a rovnoľahlosti so stredom C , ktoré zobrazí bod C_0 na bod M . Daný trojuholník ABC sa tak zobrazí na trojuholník $A'B'C$ (obr. 3) s výškou CM . Keďže $|\sphericalangle AMA'| = |\sphericalangle ACA'| = \varphi$, ležia body A, A', M a C na kružnici



Obr. 3

s priemerom $A'C$ opísanej trojuholníku AMC . Podobne stred S_2 strany $B'C$ je stredom kružnice opísanej trojuholníku BMC . Keďže S_1S_2 je stredná prieka pravouhlého trojuholníka $A'CB'$, ležia body M a C na Tálesovej kružnici s priemerom S_1S_2 . Na tejto kružnici leží aj stred S prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC , pretože SS_1 je os strany AC a SS_2 os strany BC , takže aj trojuholník S_1S_2S je pravouhlý.

Tým je dokázaná časť a). Časť b) vyriešime rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za úplné riešenie časti a) pritom dajte 4 body, z toho 2 body za dôkaz, že štvoruholník CS_1MS_2 je tetivový. Za úplné riešenie časti b) dajte 2 body. Vyjadrenie najmenšieho polomeru, napr. pomocou $|AB|$, sa nevyžaduje.

4. Nech p, q ($p < q$) sú dané prirodzené čísla. Určte najmenšie prirodzené číslo m s vlastnosťou: Súčet všetkých zlomkov v základnom tvare, ktoré majú menovateľ m a ktorých hodnoty ležia v otvorenom intervale (p, q) , je aspoň $56(q^2 - p^2)$.

(Vojtech Bálint)

Riešenie. Ukážeme, že najmenšie m je 113 (nezávisle na hodnotách p, q). Zrejme $m > 1$. Pre ľubovoľné prirodzené čísla $c < d$ a $m > 1$ označme $S_m(c, d)$ súčet všetkých zlomkov v základnom tvare, ktoré ležia v otvorenom intervale (c, d) a ktorých menovateľ je m . Potom platí nerovnosť

$$S_m(c, c+1) \leq \left(c + \frac{1}{m}\right) + \left(c + \frac{2}{m}\right) + \dots + \left(c + \frac{m-1}{m}\right) = (m-1)c + \frac{m-1}{2},$$

v ktorej rovnosť nastane práve vtedy, keď všetky čísla $1, 2, \dots, m-1$ sú nesúdeliteľné s m , t.j. práve vtedy, keď m je prvočíslo.

Pre dané prirodzené čísla p, q a $m > 1$ platí

$$\begin{aligned}
 S_m(p, q) &= S_m(p, p+1) + S_m(p+1, p+2) + \dots + S_m(q-1, q) \leq \\
 &\leq \left((m-1)p + \frac{m-1}{2} \right) + \left((m-1)(p+1) + \frac{m-1}{2} \right) + \dots \\
 &\quad + \left((m-1)(q-1) + \frac{m-1}{2} \right) = \\
 &= (m-1) \frac{(q-p)(p+q-1)}{2} + (m-1) \frac{q-p}{2} = \\
 &= (m-1) \frac{q-p}{2} (p+q-1+1) = \frac{(m-1)(q^2-p^2)}{2},
 \end{aligned}$$

teda

$$S_m(p, q) \leq \frac{(m-1)(q^2-p^2)}{2}. \quad (1)$$

Rovnosť vo vzťahu (1) pritom nastane práve vtedy, keď m je prvočíslo. Podľa zadania však platí

$$S_m(p, q) \geq 56(q^2-p^2).$$

Zo vzťahu (1) vidíme, že nutne platí $\frac{1}{2}(m-1) \geq 56$, t.j. $m \geq 113$. Vzhľadom na to, že číslo 113 je prvočíslo, je najmenšie hľadané číslo $m = 113$.

Iné riešenie. Súčet všetkých zlomkov, ktoré majú menovateľ m , nie sú celé čísla a ležia v intervale (p, q) , môžeme tiež určiť ako rozdiel súčtu všetkých zlomkov s menovateľom m ležiacich v uzavretom intervale $\langle p, q \rangle$ a súčtu všetkých prirodzených čísel z tohto intervalu. Pre uvažovaný rozdiel d potom platí

$$d = \sum_{j=pm}^{qm} \frac{j}{m} - \sum_{j=p}^q j.$$

Menšence aj menšitele v uvažovanom rozdiel možno určiť ako súčty členov aritmetických postupností. Pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti (a_i) využijeme známy vzťah

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

Pre hľadaný rozdiel d tak platí

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{1}{2}(p+q)((q-p)m+1) - \frac{1}{2}(p+q)(q-p+1) = \\
 &= \frac{1}{2}(p+q)[((q-p)m+1) - (q-p+1)] \frac{1}{2}(m-1)(q^2-p^2).
 \end{aligned}$$

Ďalej budeme postupovať rovnako ako v predchádzajúcom spôsobe riešenia.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za odvodenie nerovnosti (1) alebo nejakého ekvivalentného odhadu, ďalej 1 bod za odvodenie podmienky $m \geq 113$ a 1 bod za zdôvodnenie skutočnosti, že najmenšie m je práve 113.