Slovenská komisia MO, FPEDAS ŽU, Univerzitná 1, 010 26 Žilina

56. ročník matematickej olympiády

Úlohy II. kola kategórie A

1. Zistite, aký je najmenší možný obsah trojuholníka ABC, ktorého výšky spĺňajú nerovnosti $v_a \geqq 3\,\mathrm{cm}$, $v_b \geqq 4\,\mathrm{cm}$, $v_c \geqq 5\,\mathrm{cm}$.

2. Nech a, b sú reálne čísla. Ak má rovnica

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$$

dva rôzne reálne korene také, že ich súčet sa rovná ich súčinu, tak platí $a + b > 0$ a pritom daná rovnica nemá žiadne iné reálne korene. Dokážte.

3. Nech M je ľubovoľný vnútorný bod prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC. Označme S, S_1, S_2 stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom ABC, AMC, BMC.

a) Dokážte, že body M, C, S_1, S_2 a S ležia na jednej kružnici.

b) Pre ktorú polohu bodu M má táto kružnica najmenší polomer?

4. Nech p, q sú dané prirodzené čísla, pričom $p < q$. Určte najmenšie prirodzené číslo m s vlastnosťou: Súčet všetkých zlomkov v základnom tvare, ktoré majú menovateľa m a ktorých hodnoty ležia v otvorenom intervale (p, q), je aspoň $56(q^2 - p^2)$.

II. kolo kategórie A sa koná

v utorok 23. januára 2007

tak, aby začalo dopoludnia a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.