56. ročník Matematickej olympiády

Kategória Z9 – riešenia a návrh bodovania

Z9-III-1
Pavol si zvolil dve prirodzené čísla a vypočítal rozdiel ich druhých mocnín. Vyšlo mu 2007.
Ktoré dvojice čísel si mohol Pavel zvoliť?

(P. Tlustý)

Riešenie:
Označme Pavlove čísla *a*, *b*.
Potom zo zadania vyplýva: $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b) = 2007$
Týmto sme úlohu zmenili na: Nájdi dve prirodzené čísla, ktorých súčin je 2007.
Na jej riešenie potrebujeme prvočíselný rozklad, respektíve delitele čísla 2007.
$2007 = 3^2.223$. Možné delitele čísla 2007 sú: 1; 3; 9; 223; 669; 2007.
Zostavíme tabuľku. (Čísla v treťom riadku získame napr. podľa vzťahu $a = \frac{(a-b)+(a+b)}{2}$, čísla v štvrtom potom ľahko dopočítame.)

$a-b$	1	3	9
$a+b$	2007	669	223
a	1004	336	116
b	1003	333	107

Pavel mohol zvoliť dvojice 1004 a 1003 alebo 336 a 333 alebo 116 a 107.
Bodovanie:

Rozklad $a^2 - b^2$ na súčin	1 bod
Nápad hľadať delitele	1 bod
Výpočet čísel *a, b* (za každú dvojicu 1 bod)	3 body
Správna odpoveď so všetkými riešeniami	1 bod

Z9-III-2
V laboratóriu na polici stojí uzavretá sklenená nádoba tvaru kvádra. Nachádza sa v nej 2,4 litra destilovanej vody, ale objem nádoby je väčší. Voda v nádobe siaha do výšky 16 cm. Keď kvádrovú nádobu preklopíme na inú jej stenu, bude hladina vo výške 10 cm. Keby sme ju postavili na ešte inú stenu, voda by siahala iba do výšky 9,6 cm. Určte rozmery nádoby.

(L. Šimůnek)

Riešenie:
Rozmery nádoby označíme *a, b, c*. Pre každú polohu nádoby zostavíme rovnicu, v ktorej vyjadríme objem vody.

$$a \cdot b \cdot 16 = 2400 \qquad (1)$$
$$a \cdot c \cdot 10 = 2400 \qquad (2)$$
$$b \cdot c \cdot 9{,}6 = 2400 \qquad (3)$$

Riešime sústavu troch rovníc o troch neznámych.

$$a \cdot b = 150 \qquad (1)$$
$$a \cdot c = 240 \qquad (2)$$
$$b \cdot c = 250 \qquad (3)$$

Podľa rovnice (1): $b=\frac{150}{a}$, podľa rovnice (2): $c=\frac{240}{a}$. Takto odvodené výrazy dosadíme do rovnice (3), čím dostaneme rovnicu o jednej neznámej. Vyriešime ju.

$$\frac{150}{a}\cdot\frac{240}{a}=250$$

$$\frac{36000}{a^2}=250$$

$$a^2=144$$

V množine kladných čísel má táto kvadratická rovnica jediné riešenie, a síce a = 12. Dosadením do vyššie uvedených vzťahov vypočítame b, c.

$$b=\frac{150}{12}=12{,}5,\quad c=\frac{240}{12}=20$$

Rozmery nádoby sú teda 12 cm, 12,5 cm a 20 cm.

Bodovanie:

Zostavenie sústavy rovníc	1 bod
Výpočet jednej neznámej	2 body
Výpočet druhej a tretej neznámej	2 body
Správna odpoveď	1 bod

Z9-III-3

Prečítajte si výsledky ankety, pri ktorej bolo oslovených 1240 ľudí:

> „V existenciu Yetiho verí 46 % opýtaných (zaokrúhlené na celé číslo), 31 % v jeho existenciu neverí (zaokrúhlené na celé číslo). Ostatní účastníci ankety odmietli na túto otázku akokoľvek reagovať.“

a) Koľko najmenej ľudí mohlo v ankete odpovedať, že veria v existenciu Yetiho?
b) Koľko najviac ľudí mohlo odmietnuť na anketu odpovedať?

Uveďte konkrétne počty, nie percentá.

(L. Šimůnek)

Riešenie:

Počet ľudí, ktorí odpovedali kladne, označíme x. Počet ľudí, ktorí odpovedali záporne, označíme y. Pre tieto počty platí:

$$0{,}455\cdot 1240\le x<0{,}465\cdot 1240$$

$$564{,}2\le x<576{,}6$$

$$0{,}305\cdot 1240\le y<0{,}315\cdot 1240$$

$$378{,}2\le y<390{,}6$$

Kladne odpovedalo najmenej 565 ľudí (otázka a). Záporne odpovedalo najmenej 379 ľudí. Takže reagovať odmietlo maximálne 1240 – 565 – 379 = 296 ľudí (otázka b).

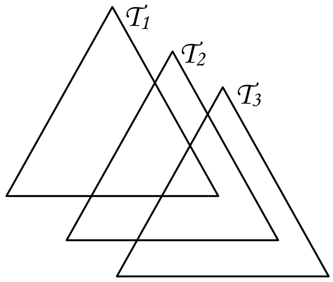
Bodovanie:

Otázka *a)*	2 body
Otázka *b)*	4 body

(Za nesprávnu úvahu, že maximálne odmietlo reagovať 100 – 45,5 – 30,5 = 24 %, tj. 297 ľudí, lebo 0,24 · 1240 = 297,6, možno udeliť 1 b.)

Z9-III-4

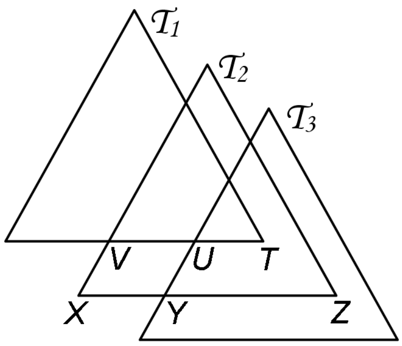
Na obrázku sú znázornené 3 zhodné, navzájom sa prekrývajúce rovnostranné trojuholníky $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$. Určte obsah každého z nich, ak viete, že súčasne platí:



- Prienikom trojuholníka $\mathcal{T}_1$ a trojuholníka $\mathcal{T}_2$ je rovnostranný trojuholník s obsahom $\sqrt{3}$ cm^2.
- Prienikom trojuholníka $\mathcal{T}_2$ a trojuholníka $\mathcal{T}_3$ je rovnostranný trojuholník s obsahom $\frac{9}{4}\sqrt{3}$ cm^2.
- Prienikom trojuholníka $\mathcal{T}_1$ a trojuholníka $\mathcal{T}_3$ je rovnostranný trojuholník s obsahom $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

(S. Bednářová)

Riešenie:



Označme jednu stranu rovnostranného trojuholníka, ktorý je prienikom $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_3$, UT (pozri obr.).

Pre obsah tohto trojuholníka platí $\frac{|UT|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, takže $|UT| = 1$ cm.

Ďalej označme stranu rovnostranného trojuholníka, ktorý je prienikom $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$, VT; zároveň $V \in \leftrightarrow UT$.

Pre obsah tohto trojuholníka platí $\frac{|VT|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$, teda $|VT| = 2$ cm.

Ďalej označme stranu rovnostranného trojuholníka, ktorý je prienikom $\mathcal{T}_3$ a $\mathcal{T}_2$, YZ; pritom $YZ \parallel VT$.

Pre obsah tohto trojuholníka platí $\frac{|YZ|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$, teda $|YZ| = 3$ cm.

Označme XZ stranu trojuholníka $\mathcal{T}_2$, ktorá je rovnobežná s VT.

$|XZ| = |XY| + |YZ|$.

Štvoruholník $XYUV$ je rovnobežník, preto $|XY| = |VU|$.

Zároveň platí $|VU| = |VT| - |UT|$.
Potom $|XZ| = |VU| + |YZ| = |VT| - |UT| + |YZ| = 2 - 1 + 3 = 4$ cm.

Obsah trojuholníka $\mathcal{T}_2$ je $\dfrac{|XZ|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ cm^2.

Bodovanie:

Výška v rovnostrannom trojuholníku	1 bod
Výpočet $\lvert UT\rvert$	1 bod
Výpočet $\lvert VT\rvert$	1 bod
Výpočet $\lvert YZ\rvert$	1 bod
Výpočet $\lvert XZ\rvert$	1 bod
Obsah trojuholníka $\mathcal{T}_2$	1 bod