

## 56. ročník Matematickej olympiády

### Kategória Z6 – riešenia a návrh bodovania

#### Z6-II-1

Zo zhodných sivých trojuholníkov a šiestich zhodných štvorcov sme zložili (bez prekrývania) útvar znázornený na obrázku. Do jeho stredu sa bez prekrývania zmestili tri zhodné štvoruholníky, každý s obsahom  $4 \text{ cm}^2$ .

a) Zistite veľkosti vnútorných uhlov sivého trojuholníka.

b) Zistite obsah celej sivej plochy.

(S. Bednářová)

#### Riešenie:

Sivé trojuholníky musia byť rovnoramenné, lebo dve ich strany sú zhodné so stranami štvorcov. To znamená, že uhly vnútorného šesťuholníka (v ktorom sú vložené štvoruholníky) musia byť všetky rovnaké. Navyše jeho strany sú rovnako dlhé. Preto vnútorný šesťuholník je pravidelný. Jeho uhly majú všetky veľkosť  $120^\circ$  a celý šesťuholník má obsah  $3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2$ . Takýto šesťuholník sa dá rozrezať na 6 rovnostranných trojuholníkov. Každý z nich bude mať obsah  $2 \text{ cm}^2$ .

Zistíme veľkosť uhla pri hlavnom vrchole sivých trojuholníkov. Ten je  $360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ . Potom zo súčtu veľkostí uhlov v trojuholníku a rovnoramennosti je zrejmé, že všetky uhly majú veľkosť  $60^\circ$  a trojuholník je rovnostranný. Sivý trojuholník je teda zhodný s rovnostrannými trojuholníkmi na ktoré sme rozdelili šesťuholník. Obsah sivých trojuholníkov je  $6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}^2$ .

#### Bodovanie:

trojuholníky sú rovnoramenné ..... 1 bod  
šesťuholník má rovnako dlhé strany ..... 1 bod  
šesťuholník má všetky uhly zhodné ..... 1 bod  
šesťuholník sa dá rozdeliť na trojuholníky ..... 1 bod  
sivé trojuholníky sú rovnostranné ..... 1 bod  
 $12 \text{ cm}^2$  ..... 1 bod

#### Z6-II-2

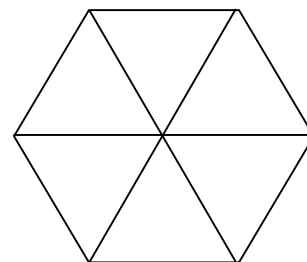
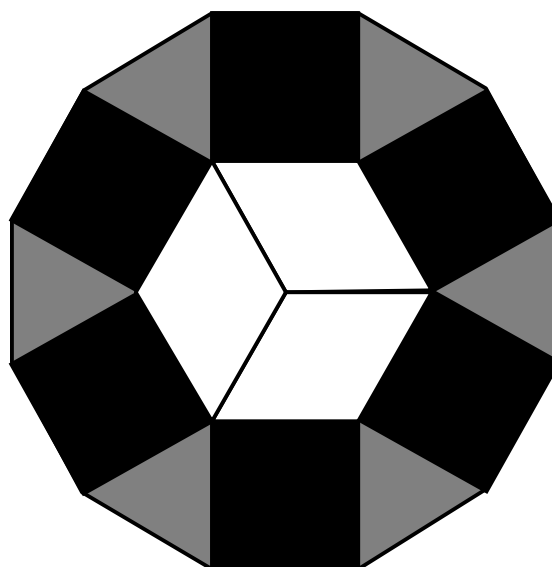
Cyril má o štvrtinu guliek viac ako Boris a ten o štvrtinu guliek viac ako Adam. Spolu majú 122 guliek. Koľko má každý z nich?

(M. Volfová)

#### Riešenie:

*Táto úloha sa dá riešiť skúšaním.*

Nech Adam má 8 guliek, potom musí mať Boris  $8 + 2 = 10$ . 10 sa nedá deliť 4, preto 8 nevyhovuje. ...



Nech Adam má 16 guliek, potom musí mať Boris  $16 + 4 = 20$  guliek. Cyril by mal  $20 + 5 = 25$  guliek. Spolu by chlapci mali  $16 + 20 + 25 = 61$  guliek. To je málo. (*Tu si môžu žiaci uvedomiť, že to je presne polovica a skúsiť zdvojnásobiť počet guliek Adama.*)

Nech Adam má 32 guliek, potom musí mať Boris  $32 + 8 = 40$  guliek. Cyril by mal  $40 + 10 = 50$  guliek. Spolu by chlapci mali  $32 + 40 + 50 = 122$  guliek.

Adam má 32, Boris 40 a Cyril 50 guliek.

*Úloha sa dá riešiť aj kreslením. Aj v tomto postupe hrá číslo 16 dôležitú úlohu.*

**Bodovanie:**

- správne pochopenie „o štvrtinu viac“ ..... 1 bod
- nájdenie 16 ..... 1 bod
- kontrola 122 ..... 1 bod
- dopočítanie ..... 3 body

**Z6-II-3**

Viacciferné číslo sa nazýva optimistické, ak jeho číslice zľava doprava rastú. Ak číslice čísla zľava doprava klesajú, hovoríme, že je to číslo pesimistické. Súčet pesimistického a optimistického čísla zloženého z tých istých číslic je 109900, ich rozdiel je 84942. Ktoré sú to čísla?

(S. Bednářová)

**Riešenie:**

Keď hľadáme čísla, ktoré vyhovujú zadaniu, musíme si uvedomiť, že pesimistické je vlastne zrkadlovým obrazom optimistického čísla. Ďalej budeme pracovať s prechodmi cez desiatku a postupne dopĺňať číslice čísla – vždy spredu a hneď aj zozadu.

			1				9
			9				1
		1	0	9	9	0	0
			9				1
	-		1				9
			8	4	9	4	2
môžeme skúsiť ďalšie číslice							
			9	7		2	1
			1	2		7	9
		1	0	9	9	0	0
osmičku sme nemohli použiť, lebo by sme museli zopakovať 1							
			9	7		2	1
	-		1	2		7	9
			8	4	9	4	2
zatiaľ to má šancu byť dobré							

			9	7	3	2	1
			1	2	5	7	9
		1	0	9	9	0	0
skúsim dosadiť trojku do pesimistického čísla							
			9	7	3	2	1
	-		1	2	5	7	9
			8	4	9	4	2
nesedí, skúsime iné navyše čísla neobsahujú tie isté číslice							
			9	7	4	2	1
			1	2	4	7	9
		1	0	9	9	0	0
			9	7	4	2	1
	-		1	2	4	7	9
			8	4	9	2	4

Optimistické číslo je 12479 a pesimistické číslo je 97421.

**Bodovanie:**

- doplnená 9 a 1 ..... 1 bod

Slovenská komisia MO, FPEDAS ŽU, Veľký diel, 010 26 Žilina

doplnená 7 a 2 .....	2 body
doplnená 4.....	2 body
odpoveď .....	1 bod