56. ročník Matematickej olympiády

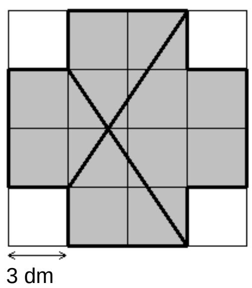
Kategória Z7 – riešenia a návrh bodovania

Z7-II-1
Baba Jaga pripravila vzácny elixír. Na trhu ponúkala 6 fľaštičiek – o objeme 11 ml, 12 ml, 17 ml, 19 ml, 21 ml a 26 ml. Elixír bol však iba v piatich z nich. Jedna fľaštička obsahovala zafarbenú vodu. Prvý kupec si odniesol 2 fľaštičky s elixírom. Druhý získal tiež iba elixír a bolo ho dvakrát viac, než koľko si odniesol prvý kupec. Viac kupcov neprišlo a tak si baba Jaga musela svoju fľaštičku s vodou odniesť domov. Ktorá to bola? Koľko ml elixíru kúpil prvý, koľko druhý kupec?
(M. Volfová)
Riešenie:
Možností, ako vybrať dve fľaštičky pre prvého kupca je veľa, ale zjavne bude treba objem jeho nákupu udržať dostatočne malý, aby druhý kupujúci mohol kúpiť dvakrát viac. Začneme teda od malých čísel. Spolu priniesla Baba Jaga 106 ml tekutiny. Ak je voda v najmenšej fľaštičke, tak prvý kupujúci mohol kúpiť najviac tretinu zvyšku, čo je 31 ml (po zaokrúhlení na celé číslo). To znamená, že druhému kupujúcemu sa mohlo ujsť najviac 62 ml elixíru.

Prvý kupujúci		spolu	Druhý kupujúci	
11 ml	12 ml	23 ml	46 ml	nedá sa
11 ml	17 ml	28 ml	56 ml	nedá sa
11 ml	19 ml	30 ml	60 ml	nedá sa
11 ml	21 ml	32 ml		to je priveľa
11 ml	26 ml	37 ml		to je priveľa
12 ml	**17 ml**	**29 ml**	**58 ml**	**11 + 21 + 26**
12 ml	19 ml	31 ml	62 ml	nedá sa
12 ml	21 ml	33 ml		to je priveľa
17 ml	19 ml	36 ml		to je priveľa

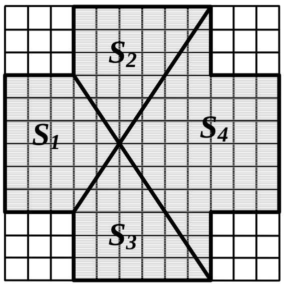
Ďalšie možnosti na základe úvahy o množstve nemá zmysel robiť.
Kupci kúpili fľaštičky s objemami 11 ml, 12 ml, 17 ml, 21 ml a 26 ml.
Voda bola vo fľaštičke s objemom 19 ml.
Prvý kúpil 29 ml elixíru a druhý 58 ml elixíru.
Bodovanie:
Úplné riešenie ....6 bodov
úplné riešenie musí obsahovať buď všetkých 15 možností pre prvého kupca, alebo zdôvodnenie, prečo už netreba ďalej prehľadávať. Ak je iba nájdené riešenie a žiak bez zdôvodnenia nepostupoval ďalej, udeľte 4 body.

Z7-II-2
Kríž na obrázku je rozdelený dvomi úsečkami na štyri diely. Určte obsah každého z nich.
(L. Šimůnek)



Riešenie:
Obrázok prekreslíme v sieti so stranou štvorčeka dĺžky 1 dm. Pritom ostane zachovaná vlastnosť deliacich čiar, že na dvoch štvorčekoch vo vodorovnom smere klesne, resp. stúpne, o tri štvorčeky.

Označme obsahy jednotlivých častí S_1, S_2, S_3 a S_4. Z obrázka je zrejmé, že platí $S_2 = S_3$. Najjednoduchšie sa dá vypočítať S_1 a S_4. Použijeme zloženie obdĺžnika a trojuholníka.



$S_1 = 6.3 + \frac{6.2}{2}$ $\quad$ $S_4 = 6.3 + \frac{12.4}{2}$

$S_1 = 18 + 6$ $\quad$ $S_4 = 18 + 24$

$S_1 = 24\ [\mathrm{dm}^2]$ $\quad$ $S_4 = 42\ [\mathrm{dm}^2]$

Obsahy ďalších dvoch častí môžeme získať zložením dvoch trojuholníkov a jedného obdĺžnika alebo odčítaním už získaných obsahov od obsahu celého kríža.

$S_2 = S_3 = 2.3 + \frac{6.4}{2} + \frac{2.3}{2}$

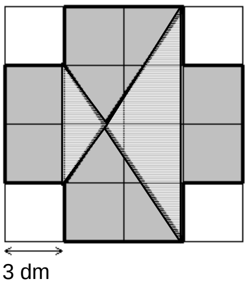
$S_2 = S_3 = 6 + 12 + 3$

$S_2 = S_3 = 21\ [\mathrm{dm}^2]$

alebo

$S_2 = S_3 = 4.3 + \frac{4.3}{2} + \frac{2.3}{2}$

$S_2 = S_3 = 21\ [\mathrm{dm}^2]$



Druhý spôsob riešenia:
Označme obsahy jednotlivých častí S_1, S_2, S_3 a S_4 ako vyššie. Potom vieme spočítať, že

$S_1 + S_2 = 6.3 + \frac{6.9}{2}$ $\quad$ $S_4 + S_2 = 6.3 + \frac{6.9}{2} + 6.3$

$S_1 + S_2 = 18 + 27$ $\quad$ a $\quad$ $S_4 + S_2 = 18 + 27 + 18$

$S_1 + S_2 = 45\ [\mathrm{dm}^2]$ $\quad$ $S_4 + S_2 = 63\ [\mathrm{dm}^2]$

Preto $S_4 - S_1 = 63 - 45 = 18\ [\mathrm{dm}^2]$. Teda veľkosti zvýraznených sivých trojuholníkov sa líšia o 18 dm^2. Ich obsahy T_1, T_2 môžeme zapísať pomocou jedinej premennej x predstavujúcej výšku malého trojuholníka T_1.

$T_1 = \frac{6.x}{2}$

$T_2 = \frac{12.(6 - x)}{2}$

$T_2 - T_1 = \frac{12.(6 - x)}{2} - \frac{6.x}{2}$

$18 = 6.(6 - x) - 3x$

$18 = 36 - 9x$

$x = 2\ [\mathrm{dm}]$

Po zistení výšky malého trojuholníka už dopočítame jednotlivé obsahy ako vyššie.

Bodovanie:

$S_2 = S_3$ .... 1 bod

nájdenie mrežového bodu, resp. $x = 2\ [\mathrm{dm}]$ .... 2 body

dopočítanie obsahov... 3 body

Z7-II-3
Hanka sa hrá s tromi prázdnymi nádobami. Najprv naplnila vodou až po okraj najmenšiu a stredne veľkú nádobu. Túto vodu preliala z oboch nádob do najväčšej. Tým ju naplnila na 50 %. Potom znovu naplnila vodou stredne veľkú nádobu až po okraj. Touto vodou najprv naplnila najmenšiu nádobu a celý zvyšok preliala do najväčšej, ktorú tým doplnila do 2/3 jej objemu. Aké sú objemy najmenšej a najväčšej nádoby, ak stredne veľká nádoba má objem 6 dl?
(M. Raabová)
Riešenie:
Hanka vlastne naplnila dvakrát prostrednú a raz malú nádobu. Teraz je táto voda v malej a vo veľkej nádobe. To znamená, že vo veľkej nádobe je 2.6 dl = 12 dl vody. Ak 12 dl predstavuje $\frac{2}{3}$ objemu veľkej nádoby, tak veľká nádoba má objem $12 \cdot \frac{3}{2} = 18[\mathrm{dl}]$.
Veľká nádoba bola naplnená do polovice (9 dl), keď v nej bola voda z malej a strednej nádoby. Teda malá nádoba má objem $9 - 6 = 3[\mathrm{dl}]$.
Bodovanie:
12 dl predstavuje $\frac{2}{3}$ .... 2 body
objem veľkej .... 2 body
objem malej.. 2 body