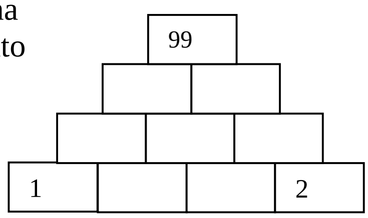
56. ročník Matematickej olympiády

Kategória Z8 – riešenia a návrh bodovania

Z8-II-1

Doplňte na prázdne tehličky sčítacej pyramídy znázornenej na obrázku chýbajúce prirodzené čísla tak, aby práve dve z týchto doplnených čísel boli rovnaké. Nájdite všetky riešenia!

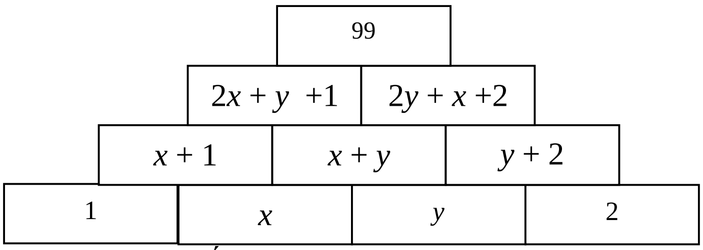
V sčítacej pyramíde sa na každej tehličke (okrem tých z najspodnejšieho riadku) nachádza súčet toho, čo je napísané na dvoch s ňou susediacich tehličkách z nižšieho riadku.



(S. Bednářová)

Riešenie:

Označme si prázdne políčka v spodnom riadku pomocou premenných x a y. Postupne doplníme aj ostatné výrazy do jednotlivých tehličiek.



Nakoľko sú dopĺňané čísla prirodzené, môžu nastať tieto prípady:

1. $x = y + 2$
2. $x = y$
3. $y = x + 1$
4. $x + 1 = y + 2$
5. $x + 1 = x + y$
6. $y + 2 = x + y$

Súčasne platí $2x + y + 1 + 2y + x + 2 = 99$, čiže $x + y = 32$

Postupne budeme hľadať hodnoty x a y, ktoré vyhovujú jednotlivým rovnostiam a ich súčet je 32.

1. $x = 17,\ y = 15$
2. $x = 16,\ y = 16$
3. neexistujú také prirodzené čísla
4. neexistujú také prirodzené čísla
5. $x = 31,\ y = 1$
6. $x = 2,\ y = 30$

Podmienke, že <u>práve dve doplnené</u> majú byť rovnaké, vyhovujú dvojice z riadkov 1, 2, 5 a 6.

(riešitelia by mali doplniť aj úplne vyplnené pyramídy!)

Bodovanie:

$x + y = 32$ .... 1 bod

všetkých 6 možností.. 1 bod

každé riešenie... á 1 bod

Z8-II-2

a) Zistite súčet všetkých dvojciferných čísel, ktorých druhá mocnina končí číslicou 9.

b) Nájdite všetky dvojciferné čísla, ktorých druhá mocnina končí dvojčíslím 44.

(M. Smitková, M. Dillingerová)

Riešenie:

a) Na poslednú cifru druhej mocniny má vplyv iba posledná cifra umocňovaného čísla.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Z tabuľky je zrejmé, že všetky čísla končiace číslicou 3 alebo číslicou 7 vyhovujú podmienke. Máme teda zistiť hodnotu $13+17+23+27+33+...+97$.
Hľadaný súčet je 990.

b) Ak je naše číslo *n* zložené z cifier *ab*, tak môžeme zapísať $n=10a+b$, čiže $n^2=100a^2+20ab+b^2$. Na poslednú cifru má vplyv člen b^2 a na predposlednú členy $20ab, b^2$. Z výpisu v časti a) vidieť, že *b* môže byť jedna z číslic 2 a 8.

1) nech $b=2$
Potom $20ab+b^2=40a+4=...44$, odkiaľ $4a=...4$, takže $a=1$ alebo $a=6$.

2) nech $b=8$
Potom $20ab+b^2=160a+64=...44$, odkiaľ $16a=...8$, takže $a=3$ alebo $a=8$.

Hľadané čísla sú 12, 62, 38, 88.

Bodovanie:

a)
čísla končia 3 alebo7 .... 1 bod
súčet je 990 .... 1 bod
b)
čísla končia 2 alebo 8 .... 1 bod
nájdenie aspoň jedného čísla končiaceho 2 .... 1 bod
nájdenie aspoň jedného čísla končiaceho 8 .... 1 bod
všetky čísla .... 1 bod

Z8-II-3

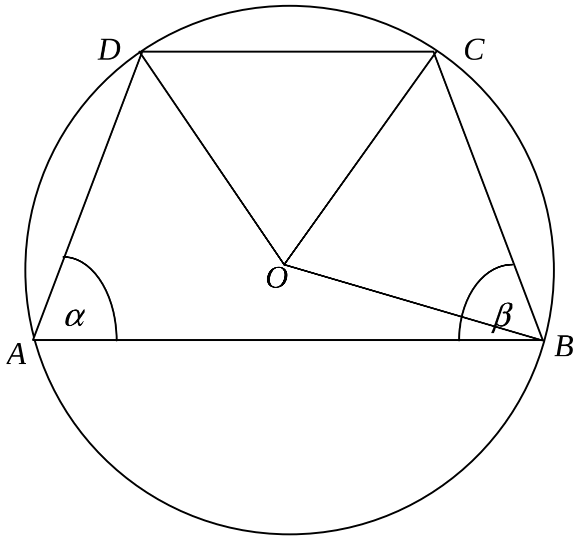
Do kružnice *k* so stredom *O* je vpísaný lichobežník *ABCD* (*AB*||CD), pričom priamka *AC* je osou uhla *DAB*. Ukážte, že potom |*AD*|=|*CD*| a navyše, priamka *CO* je osou uhla *BCD*.

(F. Kardoš)

Riešenie:

Nakoľko *AB*||CD sú uhly *DCA* a *CAB* striedavé. Teda majú rovnakú veľkosť. Navyše je uhlopriečka *AC* osou uhla *DAB*, čiže $|\angle DAC|=|\angle BAC|=|\angle DCA|$. Potom je trojuholník *ACD* rovnoramenný s ramenami *DA, DC*. Odtiaľ |*AD*|=|*CD*|.

Pre druhú časť úlohy musíme ukázať, že lichobežník je rovnoramenný, teda $\alpha=\beta$, alebo $|BC|=|DA|$.



Kružnica k je opísaná trojuholníku ABC aj trojuholníku ACD. Teda jej stred O musí ležať na osi úsečky DC aj BA. Nakoľko sú uvedené úsečky rovnobežné, budú aj ich osi rovnobežky. Ak stred O existuje a leží na dvoch rovnobežkách, potom tieto musia byť identické. Potom je lichobežník $ABCD$ rovnoramenný. Ak pridáme podmienku z prvej časti úlohy, dostaneme $|BC| = |CD| = |DA|$.

Okrem toho platí $|BO| = |CO| = |DO|$.

Podľa vety sss $\Delta OBC \cong \Delta OCD$ a oba trojuholníky sú rovnoramenné s hlavným vrcholom O.

Pre ich uhly platí: $|\angle\, OBC| = |\angle\, BCO| = |\angle\, DCO| = |\angle\, CDO|$, teda priamka CO je osou uhla BCD.

Bodovanie:

striedavé uhly .... 1 bod

ΔACD je rovnoramenný .... 1 bod

lichobežník je rovnoramenný .... 2 body

$\Delta OBC \cong \Delta OCD$ .... 1 bod

$|\angle\, OBC| = |\angle\, BCO| = |\angle\, DCO| = |\angle\, CDO|$ a záver .... 1 bod