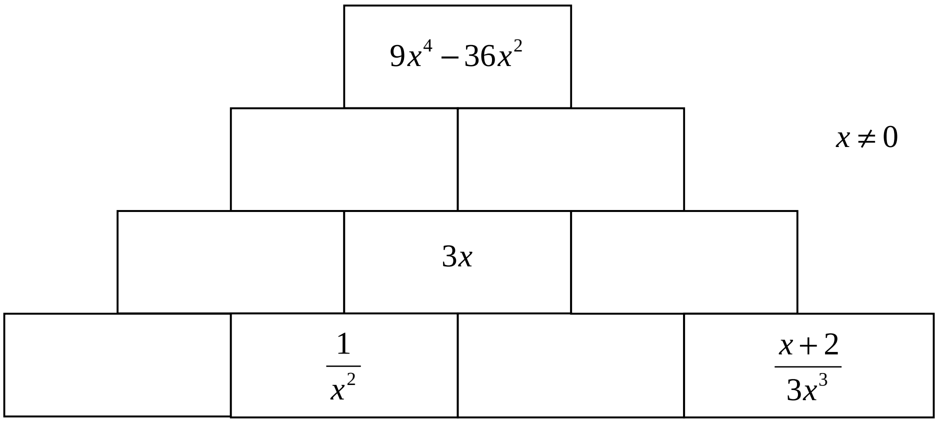
56. ročník Matematickej olympiády

Kategória Z9 – riešenia a návrh bodovania

Z9-II-1

V súčinovej pyramíde sa na každej tehličke (okrem tých z najspodnejšieho riadku) nachádza súčin toho, čo je napísané na dvoch s ňou susediacich tehličkách z nižšieho riadku. Doplňte na prázdne tehličky súčinovej pyramídy znázornenej na obrázku chýbajúce výrazy. Výrazy píšte v čo najjednoduchšom tvare a uveďte, v akom poradí ste ich doplňovali.
(S. Bednářová)



$x \neq 0$

Riešenie:

Najprv doplníme 3. výraz v spodnom riadku. Bude ním $3x : \frac{1}{x^2} = 3x^3$.

Posledný výraz v 2. riadku zdola je $3x^3 \cdot \frac{x+2}{3x^3} = x + 2$.

Posledný výraz v 3. riadku zdola je $3x \cdot (x + 2) = 3x^2 + 6x$.
(Do pyramídy možno vždy doplĺňať ľubovoľný z oboch podčiarknutých výrazov.)
Prvý výraz v 3. riadku zdola je

$$\frac{9x^4 - 36x^2}{3x^2 + 6x} = \frac{(3x^2 + 6x)(3x^2 - 6x)}{3x^2 + 6x} = 3x^2 - 6x = 3x \cdot (x - 2).$$

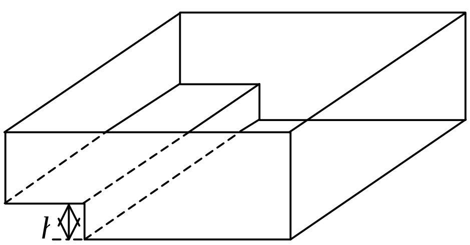
Prvý výraz v 2. riadku zdola je $\frac{3x^2 - 6x}{3x} = \frac{3x(x-2)}{3x} = x - 2$.

Prvý výraz v 1. riadku zdola je $(x - 2) : \frac{1}{x^2} = (x - 2) \cdot x^2 = x^3 - 2x^2$.

Bodovanie:

za správne doplnenie každého čísla 1 bod
(6 správnych čísel = 6 bodov)

Z9-II-2



Na obrázku vidíte bazén, s dlhým schodom pri jednej jeho stene. Prázdny bazén sme začali napúšťať prívodom s konštantným prietokom a sledovali sme výšku hladiny. Za 8 min hladina vystúpila do výšky 20 cm a dovtedy ešte nebola na úrovni schodu. Po 23

min napúšťania sa hladina nachádzala vo výške 55 cm od dna a schod už bol nejakú dobu pod hladinou. Po 35,5 min napúšťania bol bazén naplnený do výšky 80 cm. Aká je výška *h* schodu?
(L. Šimůnek)

Riešenie:

Rýchlosť stúpania v dobe 0 – 8 min:

$$20 : 8 = 2{,}5 \text{ (cm/min)}$$

Rýchlosť stúpania v dobe 23 – 35,5 min:

$$(80 - 55) : (35{,}5 - 23) = 25 : 12{,}5 = 2 \text{ (cm/min)}$$

Čas, za ktoý hladina vystúpila do výšky *h*, označíme *t* a vypočítame ho pomocou rovnice:

$$t \cdot 2{,}5 + (23 - t) \cdot 2 = 55$$

$$0{,}5 \cdot t + 46 = 55$$

$$t = 18 \,(\text{min})$$

Trvalo teda 18 min, než hladina vystúpila do výšky *h*. Po celú túto dobu stúpala rýchlosťou 2,5 cm/min.

Preto $h = 18 \cdot 2{,}5 =$ $\underline{45 \text{ (cm)}}$.

Bodovanie:

Rýchlosť stúpania do výšky *h*	1 bod
Rýchlosť stúpania nad výškou *h*	1 bod
zostavenie rovnice + jej vyriešenie (alebo riešenie úvahou)	2 body
správna výška *h*	2 body

Z9-II-3

Nováková, Vašková a Sudková vyhrali štafetu a okrem diplomov dostali aj bonboniéru, ktorú hneď po závode zjedli. Keby zjedla Petra o 3 bonbóny viac, zjedla by ich práve toľko čo Miška s Janou dokopy. A keby si Jana pochutnala ešte na siedmich bonbónoch, tiež by ich mala toľko ako druhé dve spolu. Ešte vieme, že počet bonbónov, ktoré zjedla Vašková, je deliteľný tromi, a že Sudková si pochutila na siedmich bonbónoch. Ako sa volali dievčatá? Koľko bonbónov zjedla každá z nich?
(M. Volfová)

Prvý spôsob riešenia:

Označme počet bonbónov, ktoré zjedla Petra *p*, Jana *j*, Miška *m*. Platí:

$$p + 3 = m + j$$

$$j + 7 = p + m$$

Odčítame druhú rovnicu od prvej. Získame $p - j - 4 = j - p$, teda:

$$2p - 4 = 2j$$

$$p = j + 2$$

Zostavíme tabuľku:

j	1	2	...	5	6	7
p	3	4	...	7	8	9
m	5	5	...	5	5	5

Číslo 7 sa objaví iba v dvoch stĺpcoch; jedno číslo má byť deliteľné tromi – vyhovuje posledný sloupec.

Jana Sudková mala 7 bonbónov; Petra Vašková 9 a Miška Nováková 5 bonbónov.

Bodovanie:

Objav vzťahu $p = j + 2$	2 body

zostavenie tabuľky	2 body
čísla 7, 9, 5	1 bod
správne priradenie mien	1 bod

Druhý spôsob riešenia:

Rovnakým spôsobom prídeme k vzťahu $p = j + 2$.

Tento výraz dosadíme za *p* do prvej rovnice. Úpravami získame *m*.

$$(j + 2) + 3 = m + j$$

$$m = 5$$

Podľa zadania je jedna z neznámych 7.

● Ak $p = 7$, tak $j = p - 2 = 5$. V tomto prípade by žiadna neznáma nebola deliteľná tromi.

● Ak $j = 7$, tak $p = j + 2 = 9$. Táto možnosť vyhovuje zadaniu.

Jana Sudková mala 7 bonbónov; Petra Vašková 9 a Miška Nováková 5 bonbónov.

Bodovanie:

Objav vzťahu $p = j + 2$	2 body
$m = 5$	1 bod
čísla 7, 9, 5	2 body
správne priradenie mien	1 bod

Z9-II-4

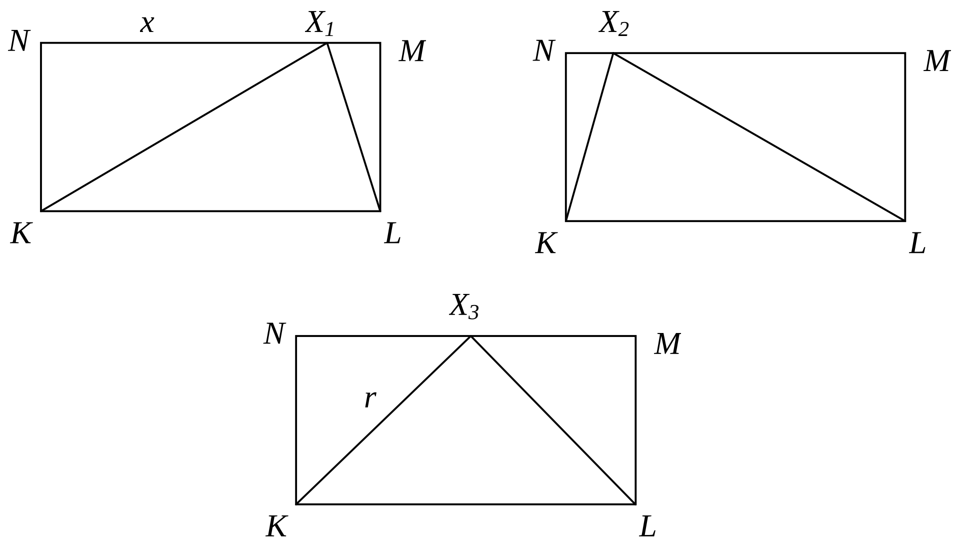
Daný je obdĺžnik *KLMN*, kde $|KL| = 6\,\text{cm}$ a $|ML| = 4\,\text{cm}$. Vypočítajte obvody všetkých rovnoramenných trojuholníkov *KLX*, ktorých vrchol *X* leží na strane *MN*.

(M. Dillingerová)

Riešenie:

V rovnoramennom trojuholníku *KLX* môže byť *KL* a) ramenom alebo b) základňou. Všetky prípady sú na obrázku nižšie.

a.) Nech to je trojuholník KLX_1, kde $|KL| = |KX_1| = 6$. Označme $|NX_1| = x$.
Podľa Pytagorovej vety platí $4^2 + x^2 = 6^2$, odkiaľ $x^2 = 20$, $x = 2.\sqrt{5}$ [cm].
Potom $|X_1M| = 6 - 2.\sqrt{5}$ [cm].



V trojuholníku LMX_1 podľa Pytagorovej vety platí $|X_1L|^2 = \left(6 - 2.\sqrt{5}\right)^2 + 4^2$,
odkiaľ $|X_1L| = \sqrt{72 - 24.\sqrt{5}} = 2.\sqrt{18 - 6.\sqrt{5}}$ [cm] a obvod

$o = 6 + 6 + 2.\sqrt{18 - 6.\sqrt{5}} = 12 + 2.\sqrt{18 - 6.\sqrt{5}}$ [cm].

To isté bude platiť pre trojuholník KLX_2, kde $|KL| = |X_2L| = 6$ [cm];

$|KX_2| = |X_1L| = \sqrt{72 - 24.\sqrt{5}} = 2.\sqrt{18 - 6.\sqrt{5}}$ [cm];

$o = 6 + 6 + 2.\sqrt{18 - 6.\sqrt{5}} = 12 + 2.\sqrt{18 - 6.\sqrt{5}}$ [cm].

b.) Ak je KL základňou rovnoramenného trojuholníka, leží bod X_3 uprostred strany MN. Pro dĺžku ramena r platí $r^2 = 3^2 + 4^2$; teda $r = 5$ [cm], $o = 6 + 5 + 5 = 16$ [cm].

Bodovanie:

Určenie obvodu trojuholníka KLX_1	3 body
Určenie obvodu trojuholníka KLX_2	1 bod
Určenie obvodu trojuholníka KLX_3	2 body

Poznámka: nakoľko žiaci nesmú použiť žiadnu kalkulačku, je možné uynávať výsledky iba s odmocninami.