Slovenská komisia matematickej olympiády

Fakulta PEDAS Žilinskej univerzity, Univerzitná 1, 010 26 Žilina

56

MO

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pre žiakov základných škôl

a nižších ročníkov osemročných gymnázií

56. ročník, školský rok 2006/2007

I. kolo (domáca časť)

Milí žiaci,

máte radi zaujímavé matematické úlohy a chceli by ste si zasúťažiť v ich riešení? Ak áno, zúčastnite sa Matematickej olympiády (MO). Súťaž je dobrovoľná a nesúvisí s klasifikáciou z matematiky. Matematická olympiáda má niekoľko kategórií. V tomto letáku nájdete úlohy, ktoré sú určené žiakom základných škôl (ZŠ) a prvých štyroch ročníkov osemročných gymnázií (OG).

Kategória **Z9** je určená pre žiakov 9. ročníka ZŠ, 4. ročníka OG a 1. ročníka bilingválnych gymnázií.

Kategória **Z8** je určená len pre žiakov 8. ročníka ZŠ .

Kategória **Z7** je určená pre žiakov 7. ročníka ZŠ a 3. ročníka OG.

Kategória **Z6** je určená pre žiakov 6. ročníka ZŠ a 2. ročníka OG.

Kategória **Z5** je určená pre žiakov 5. ročníka ZŠ a 1. ročníka OG.

Kategória **Z4** je určená pre žiakov 4. ročníka ZŠ.

So súhlasom svojho učiteľa matematiky môžete súťažiť aj v niektorej kategórii určenej pre vyšší ročník (aj v kategórii Z8),alebo v kategóriách **A**, **B**, **C** alebo **P**, ktoré sú určené pre žiakov stredných škôl (úlohy sú uverejnené v letákoch MO pre stredné školy).

Priebeh súťaže

Kategória Z4 pozostáva z domáceho a školského kola, kategórie Z5, Z6, Z7, Z8 z domáceho a okresného kola, kategória Z9 z domáceho, okresného a krajského kola.

V rámci domáceho kola riešite 6 úloh, ktoré sú v tomto letáku. **Riešenia úloh odovzdajte svojim učiteľom matematiky najneskôr v týchto termínoch:**

kategória	jedna trojica úloh	druhá trojica úloh
Z4, Z5, Z9	3. november 2006	15. december 2006
Z6, Z7, Z8	1. december 2006	25. február 2007

Vaši učitelia vám riešenia opravia a ohodnotia podľa stupnice:

1 - *výborne*, 2 - *dobre*, 3 - *nevyhovuje*.

Úspešným riešiteľom domáceho kola sa stáva žiak, ktorý bude mať ohodnotené aspoň štyri úlohy stupňom aspoň *dobre*. Práce všetkých úspešných riešiteľov kategórií Z5 - Z9 zašle vaša škola okresnej komisii MO. Tá z nich vyberie najlepších riešiteľov a pozve ich do okresného kola. V rámci neho riešite úlohy podobného rázu ako v domácom kole, avšak klauzúrne, to znamená, že nemôžete využívať cudziu pomoc a na riešenie máte k dispozícii obmedzený čas, (2 hodiny v kategóriách Z5, Z6, Z7, Z8, 4 hodiny v kategórii Z9).

V kategórii Z4 sa úspešní riešitelia domáceho kola zúčastnia školského klauzúrneho kola. Najlepší riešitelia okresného kola kategórie Z9 budú pozvaní do krajského kola.

Termíny 56. ročníka Matematickej olympiády:

kategória	II. kolo	III. kolo
Z4	24.01.2007	**-------**
Z5	24.01.2007	**-------**
Z6-Z8	11.04.2007	**-------**
Z9	24.01.2007	21.03.2007

Pokyny a rady súťažiacim

Riešenie súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Jozef Plachý, 7.C ZŠ Hodžova ul. 5, 949 01 Nitra Úloha Z7-I-2

Riešenie píšte tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup, podrobne vysvetlite, ako ste uvažovali. Uvedomte si, že sa hodnotí nielen výsledok, ku ktorému ste došli, ale hlavne správnosť úvah, ktoré k nemu viedli. Práce, ktoré nebudú spĺňať tieto podmienky, alebo budú odovzdané po termíne, nebudú do súťaže prijaté.

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh MO prajú

RNDr. Monika Dillingerová, PhD.

SK MO, vedúca sekcie Z

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.

predseda SK MO

Archív zadaní a riešení úloh MO nájdete na internetových stránkach:

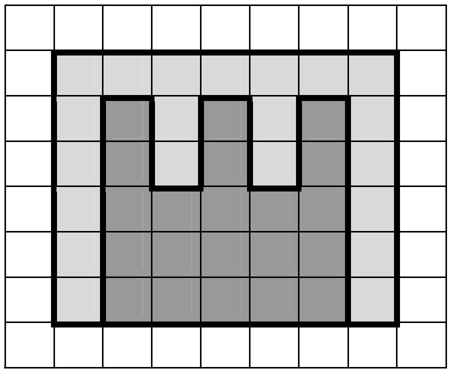
http://www.iuventa.sk

http://pppnnn.webpark.sk/mo.htm

http://matematika.webpark.sk

Z4-I-1

Na obrázku 1 sú v štvorčekovej sieti znázornené dva ZUBOUHOLNÍKY (svetlosivý a tmavosivý), ktoré sa zahryzli do seba. (ZUBOUHOLNÍK je špeciálny druh mnohouholníka.) Zistite, ktorý z nich má väčší obsah a ktorý obvod. (Bednářová S.)



Obr. 1

Z4-I-2

Miss STRANGELANDIA dostala tak veľa rôznych ponúk od rôznych modelingových agentúr, že si z nich nevedela vybrať. Napokon sa rozhodla, že prijme ponuku tej z nich, ktorá ako prvá uhádne číslo jej topánok. Prezradila im, že je to dvojciferné číslo s ciferným súčtom 12 a že, keby sa v tomto čísle zmenilo poradie číslic, vzniklo by číslo o 54 väčšie. Aké číslo topánok nosí Miss STRANGELANDIA? (Bednářová S.)

Z4-I-3

Jurko včera na magnetickej tabuli vytvoril vzorový príklad. Dnes, keď prišiel do školy, zistil, že pani upratovačka ho „upratala“ a všetky použité číslice a znaky zoradila na dolnom okraji tabule takto:

3 4 5 6 8 9 + =

Aký príklad vytvoril včera Jurko? Nájdi všetky možnosti. (Dillingerová M.)

Z4-I-4

Rodičia prvej slovenskej superstar K.K. sa starajú o jaskyňu „Zlá diera“. V jaskyni je tma, návštevníci si svietia karbidovými lampášikmi. Pre seba a pre pani učiteľku má pán Košč väčšiu lampičku. Lampášikov však mali len 9, preto sprievodca pán Košč zoradil našu skupinu ako husi tak, že tesne pred tým, kto nemal lampášik, išiel niekto s lampášikom alebo lampičkou. Prvý v zástupe bol on, posledná pani učiteľka s lampičkou. Lampášik niesli 4 chlapci, 4 dievčatá lampášik nedostali. Koľko dievčat bolo v našej skupine? Koľko tam bolo chlapcov? Poznámka: Nik neniesol dva lampášiky, a žiadni dvaja s lampášikmi nešli tesne za sebou. (Bednářová S.)

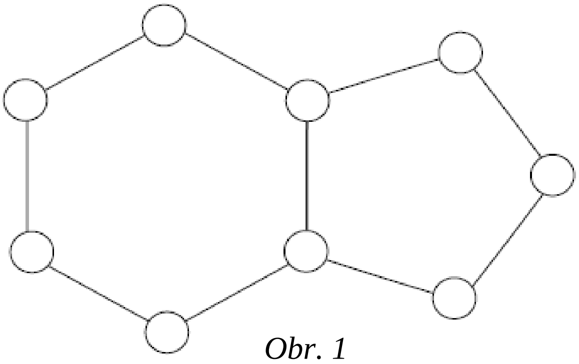
Z4-I-5

Sedem Snehulienkiných trpaslíkov bolo na hríboch. Prišli s košíčkami, v ktorých mali 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hríbov. Snehulienka im povedala, aby niektoré košíčky uložili do špajze, niektoré dali ku sporáku a ostatné položili na stôl tak, že všade malo byť rovnako veľa hríbov. Trpaslíci sa rozhodli, že hríby z košíčkov nebudú vyberať. Podarí sa im uložiť košíčky tak, ako to chcela Snehulienka? Nájdi aspoň jeden spôsob. (Ptáčková Š.)

Z4-I-6

Z čísla 1583719 vyškrtni tri číslice tak, aby vzniklo čo najväčšie číslo, ktorého každá číslica je nepárna. (Dillingerová M.)

Kategória Z5



Obr. 1

Z5-I-1
Na obrázku číslo 1 vidíš päťuholník a šesťuholník so spoločnou stranou. Doplň do krúžkov na tomto obrázku čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak, aby súčet čísel v šesťuholníku aj súčet čísel v päťuholníku bol 24. Každé číslo smieš použiť len raz. Stačí, keď nájdeš jedno riešenie.
(Hozová L.)

Z5-I-2
Cyklistického preteku *Krížom - krážom* sa zúčastnili šesťčlenné družstvá z celej Európy. Prvých desať etáp ešte zvládli všetci, ale v jedenástej etape po hromadnom páde odstúpilo 17 cyklistov. V každej ďalšej etape ich potom odstúpilo o troch menej ako v predošlej. Do cieľa poslednej, 15. etapy, došlo 53 cyklistov. Koľko družstiev sa zúčastnilo preteku?
(Ptáčková Š.)

Z5-I-3
Tomáškova cvičená blcha Skákalka stála na ciferníku hodín na bodke pri čísle 12. Hrala sa s ním takúto hru: Tomáško hodil kockou a blcha skočila o toľko bodiek ďalej, koľko mu padlo na kocke. Ale po prvom hode skákala v smere pohybu hodinových ručičiek, po druhom proti smeru a po treťom opäť v smere pohybu hodinových ručičiek. Vieme, že Tomáško hodil dvojku, päťku a šestku, ale nevieme, v akom poradí mu padli.

a) Na bodke pri ktorom čísle mohla skončiť Skákalka po treťom skoku?
b) Na ktoré číslo sa blcha počas hry vôbec nemohla dostať?

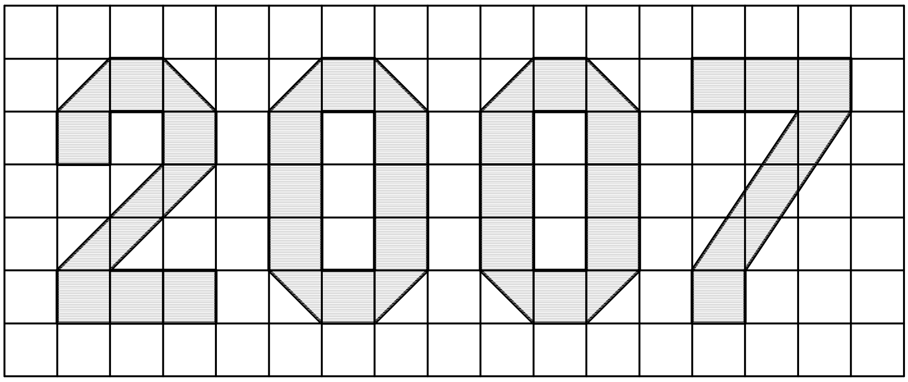
(Hozová L.)

Obr. 2

Z5-I-4
Pomocou číslic 0 až 9 a dvoch desatinných čiarok utvor dve desatinné čísla tak, aby ich súčet bol čo najmenší. Nájdi všetky možnosti! (Každú číslicu treba použiť práve raz!)
(Bednářová S.)

Z5-I-5
Sedem Snehulienkiných trpaslíkov bolo na hríboch. Prišli s košíčkami, v ktorých mali 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hríbov. Snehulienka im povedala, aby niektoré košíčky uložili do špajze, niektoré dali ku sporáku a ostatné položili na stôl tak, že všade malo byť rovnako veľa hríbov. Trpaslíci sa rozhodli, že hríby z košíčkov nebudú vyberať. Podarí sa im uložiť košíčky tak, ako to chcela Snehulienka? Nájdi aspoň jeden spôsob.
(Ptáčková Š.)

Z5-I-6
Na obrázku číslo 3 je v štvorčekovej sieti znázornené číslo 2007. Zisti obsah sivej časti obrázka, ak vieš, že strana každého malého štvorčeka meria 4 cm.
(Raabová M.)

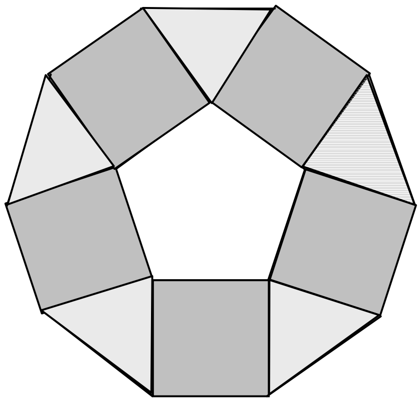


Obr. 3

Kategória Z6

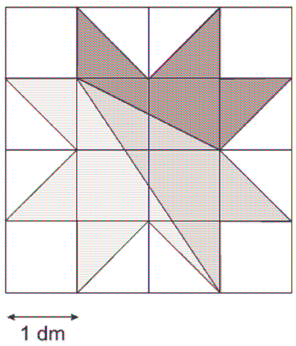
Z6-I-1
Lukáš natieral latkový plot. Každých 10 minút natrel 8 latiek. Jeho mladší brat Kubko mu chvíľku pomáhal. Za 7 minút natrel vždy 4 latky, takže Lukáš skončil o štvrť hodiny skôr, ako predpokladal. Ako dlho mu Kubko pomáhal?
(Raabová M.)

Z6-I-2
Zo zhodných rovnoramenných trojuholníkov a štvorcov sme zložili (bez prekrývania) útvar znázornený na obrázku číslo 1. Zisti veľkosti vnútorných uhlov týchto rovnoramenných trojuholníkov.
(Bednářová S.)



Obr. 1

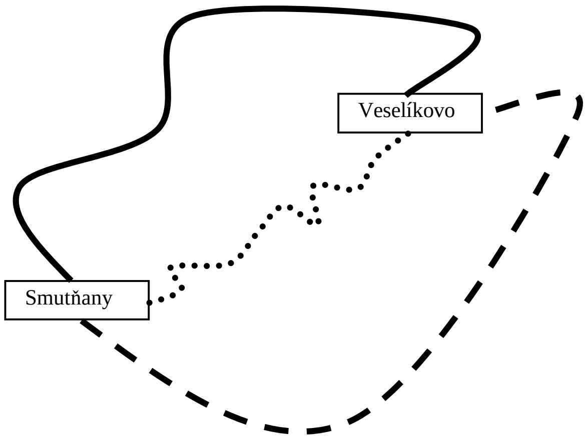
Z6-I-3
Hviezda na obrázku číslo 2 v štvorcovej sieti je rozdelená dvomi úsečkami na tri časti. Zisti obsahy jednotlivých častí.



Obr. 2

(Šimůnek L.)

Z6-I-4
Zo Smutňan do Veselíkova vedú tri cesty. (Pozri obrázok číslo 3.) Tá, ktorá je na mape vyznačená ako plná, meria 40 km, najvyššia povolená rýchlosť je na nej 80 km/h a vyberá sa na nej mýto 50 korún. „Bodkovaná“ cesta je dlhá 35 km, najvyššia povolená rýchlosť je na nej 60 km/h a mýtne je 150 korún. Na „čiarkovanej“ ceste, ktorá je dlhá 45 km sa vyberá mýto 100 korún a najvyššia povolená rýchlosť je 100 km/h. Ujo Ponáhľavý a teta Šporovlivá sa chcú dostať zo Smutňan do Veselíkova, ujo čo najskôr a teta čo najlacnejšie. Obaja si zavolali taxík. Šoféri taxíkov celú cestu idú maximálnou povolenou rýchlosťou a účtujú si 15 korún za jeden km cesty a zaplatené mýtne.



Obr. 3

a) Ktorou cestou sa má vybrať taxikár uja Ponáhľavého?
b) Ktorou cestou sa má vybrať taxikár tety Šporovlivej?

c) O koľko minút menej bude trvať ujova cesta v porovnaní s tetinou?
d) O koľko korún viac zaplatí ujo ako teta?
(Bednářová S.)

Z6-I-5

Viacciferné číslo sa nazýva optimistické, ak jeho číslice zľava doprava rastú. Ak číslice čísla zľava doprava klesajú, hovoríme, že je to číslo pesimistické. Súčet sedemciferného pesimistického a sedemciferného optimistického čísla, zloženého z tých istých číslic je 11001000. Ktoré číslice sme použili na zápis týchto dvoch čísel?
(Bednářová S.)

Z6-I-6

Naša trieda plánovala turistický výlet. Niektorí žiaci sa dohadovali o dĺžke jeho trasy a tvrdili, že je to 28, 16, 32, 37 a 15 km. Mýlili sa však o 5, 7, 8, 9 a 14 km. Aký dlhý bol výlet v skutočnosti?
(Volfová M.)

Kategória Z7

Z7-I-1
Janka narysovala 6-uholník, ktorého dĺžky strán vyjadrené v cm sú celé čísla. Potom si uvedomila, že každé dve jeho susedné strany sú na seba kolmé. Zisti, ako mohol vyzerať Jankin 6-uholník, ak jeho obvod má byť 16 cm a jeho obsah má byť 12 cm^2. Narysuj obe možnosti.
(Dillingerová M.)

Z7-I-2
Rozdeľ obdĺžnik na obrázku č.1, ktorý sa skladá z rovnakých štvorcov na čo najmenší počet zhodných častí tak, aby každá z nich obsahovala len také čísla, ktoré dávajú po delení tromi navzájom rôzne zvyšky. Pozor, rezať sa smie len po čiarach siete!
(Bednářová S.)

		14	32		
43	102	11			90
22	18		301		7
	35		99	29	
12				62	

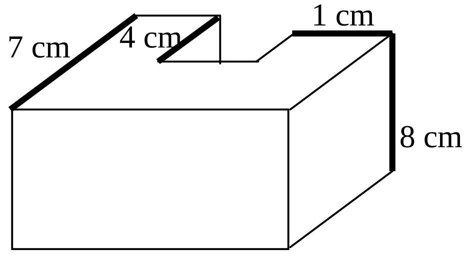
Obr. 1

Z7-I-3
Urči počet zlomkov, ktorých hodnota je násobkom troch a čitateľ aj menovateľ sú trojciferné prirodzené čísla.
(Šimůnek L.)

Z7-I-4
Rozprávkový deduško niesol vrece zrna do mlyna. Po ceste mu zrno začalo z vreca vypadávať. Tri vtáčiky si všimli, že za deduškom ostáva cestička označená jednotlivými zrnkami. Prvý išiel zobať zrnká zelený vtáčik a zozobal každé štvrté zrnko ležiace na zemi. Potom priletel zobať červený vtáčik a zozobal každé piate na zemi ležiace zrnko. Nakoniec zlietol na cestičku modrý vtáčik a zozobal každé tretie na zemi ležiace zrnko. Koľko zrniek stratil deduško z vreca, ak vtáčiky zozobali spolu 79 zrniek?
(Dillingerová M.)

Z7-I-5
Troj- a viacciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi, pre ktorého žiadne tri za sebou idúce číslice a, b, c neplatí $a<b<c$ ani $a>b>c$, sa nazýva vlnité. Napíš
a) najväčšie vlnité číslo, ktoré nie je deliteľné 3,
b) najväčšie vlnité číslo deliteľné 150.
(Bednářová S.)

Z7-I-6
Osemboký kolmý hranol načrtnutý na obrázku č. 2 vznikol zlepením troch kvádrov. Zisti objem a povrch tohto hranola, ak poznáš dĺžky vyznačených hrán a vieš, že z ôsmich jeho bočných stien sú vždy dve a dve zhodné.
(Bednářová S.)



Obr. 2

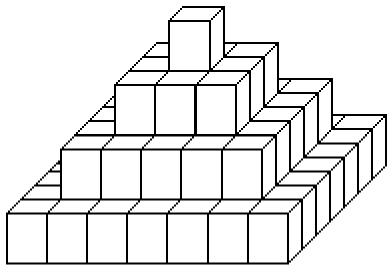
Kategória Z8

Z8-I-1
Z číslic 1 až 9 sme utvorili tri zmiešané čísla $a\frac{b}{c}$. Potom sme tieto tri čísla správne sčítali. Aký najmenší súčet sme mohli dostať?
(Každú číslicu sme použili práve raz!)
(Bednářová S.)

Z8-I-2
Pán kráľ si dal naliať plnú čašu vína. Pätinu vína z nej odpil. Potom si nechal čašu doplniť vodou a odpil štvrtinu objemu. Opäť mu ju doliali vodou a kráľ odpil tretinu. Nakoniec čašu ešte raz doliali vodou doplna. Koľko percent objemu čaše tvorí pôvodné víno?
(Krejčová M.)

Z8-I-3
Je daný pravidelný deväťuholník *ABCDEFGHI*. Vypočítajte veľkosť uhla, ktorý zvierajú priamky *DG* a *BE*.
(Krejčová M., Raabová M.)

Z8-I-4
Žiaci postavili z množstva rovnakých kociek pyramídu, ktorej časť vidíte na obrázku. Pyramída, svojho druhu najväčšia na svete, stála od tej doby na školskom dvore a pršalo na ňu. Po čase sa museli všetky kocky, na ktoré pršalo, teda tie na povrchu, vymeniť. Vymenilo sa celkom 2 025 kociek. Koľko mala pyramída vodorovných vrstiev?
(Šimůnek L.)


Obr. 1

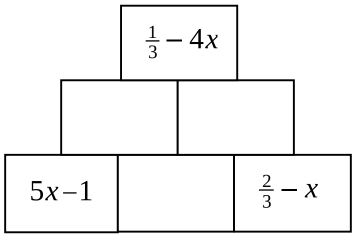
Z8-I-5
Na lúke sa pásli ovce. Tých s rohami bolo dvakrát menej ako tých bez rohov. Tých s tmavým kožúškom bolo toľko, ako tých so svetlým kožúškom. (Iné ovce, jednorohé, fľakaté a pod., sa na lúke nepásli.) Iba tri tmavé ovečky nemali rohy a svetlé vôbec nemali rohy. Koľko ovečiek sa páslo na lúke?
(Dillingerová M.)

Z8-I-6
Výška rovnoramenného trojuholníka *ABC* delí tento trojuholník na dve časti, ktorých obsahy sú v pomere 1:3. Určte obsah a obvod trojuholníka *ABC*, ak viete, že $|AC| = |BC|$ a $|AB| = \sqrt{32}$ cm.
(Hozová L.)

Kategória Z9

Z9-I-1
Zistite, koľko je takých šesťciferných čísel, ktoré majú ciferný súčin 750?
(Tlustý P.)

Z9-I-2
V sčítacej pyramíde sa na každej tehličke (okrem tých z najspodnejšieho riadku) nachádza súčet toho, čo je napísané na dvoch s ňou susediacich tehličkách z nižšieho riadku. Doplňte na prázdne tehličky sčítacej pyramídy znázornenej na obrázku chýbajúce výrazy.
(Bednářová S.)



Z9-I-3
Do kružnice s polomerom 2 cm je vpísaný pravidelný šesťuholník *ABCDEF*. Priesečník priamok *FE* a *CD* označme *M*. Vypočítajte dĺžku úsečky *AM*.
(Volfová M.)

Z9-I-4
Matematickej súťaže sa zúčastnilo 142 žiakov. Po skončení súťaže autor zistil, že priemerný počet bodov udelených za tretiu úlohu pripadajúci na jedného súťažiaceho je 2,7 (zaokrúhlené na desatiny). Nie každý súťažiaci však tretiu úlohu odovzdal, takže priemerný počet bodov udelených za tretiu úlohu pripadajúci na jedno odovzdané riešenie bol 3,9 (zaokrúhlené na desatiny). Koľko súťažiacich mohlo odovzdať tretiu úlohu?
Poznámka: Udeľovali sa len celé body, neodovzdaná úloha bola hodnotená 0 bodmi.
(Šimůnek L.)

Z9-I-5
Trojuholník *REZ* s obsahom 300 cm^2, stranou *RE* dĺžky 25 cm a stranou *ZE* dĺžky 30 cm sme dvomi priamymi rezmi rozdelili na 3 časti a z týchto častí zložili (bez prekrývania) obdĺžnik. Aké rozmery mohol mať tento obdĺžnik? Nájdite všetky možnosti.
(Bednářová S.)

Z9-I-6
Ukážte, že číslo

$$(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot 2003\cdot 2005)+(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2004\cdot 2006)$$

je deliteľné číslom 2007^4.
(Tlustý P.)

Na ukážku uvádzame ***vzorové riešenie*** jednej úlohy zo staršej olympiády:

Úloha Z8-II-1.

Daný je obdĺžnik s celočíselnými dĺžkami strán. Ak zväčšíme jednu jeho stranu o 4 a druhú zmenšíme o 5, dostaneme obdĺžnik s dvojnásobným obsahom. Určte strany daného obdĺžnika. Nájdite všetky možnosti.

Riešenie. Dĺžky strán obdĺžnika označíme a, b. Nový obdĺžnik má dĺžky strán a + 4, b – 5. Podľa podmienky úlohy pre obsahy oboch obdĺžnikov platí:

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupne upravíme: $$ab - 4b + 5a = -20$$

$$ab - 4b + 5a - 20 = -40$$

Odčítali sme 20, aby sme mohli ľavú stranu upraviť na súčin:

$$(a-4)(b+5) = -40\,.$$

Riešenie nájdeme rozkladom čísla -40 na dva činitele. Pritom musí byť a > 0,
b > 0, a teda $a - 4 > -4, \quad b + 5 > 5\,.$

Sú dve možnosti: $(-2).20 = -40$ a $(-1).40 = -40\,.$

V prvom prípade dostaneme obdĺžnik o stranách a = 2, b = 15 s obsahom S = 30. Nový obdĺžnik má potom strany a' = 6, b' = 10 a obsah S' = 60, t.j. S' = 2S.

V druhom prípade dostaneme obdĺžnik so stranami a = 3, b = 35 s obsahom S = 105. Nový obdĺžnik má potom strany a' = 7, b' = 30 a obsah S' = 210. Opäť je S' = 2S.

Na záver jedna rada:

Úlohy nie sú ľahké. Nenechajte sa odradiť, keď neobjavíte hneď riešenie. Experimentujte, kreslite si, „hrajte sa“ s úlohou. Niekedy pomôže pozrieť sa do nejakej knižky, kde nájdete podobné úlohy vyriešené, inokedy sa môže stať, že zrazu o tri dni „z ničoho nič“ na riešenie prídete.

Súťaž vyhlasuje Ministerstvo školstva SR spolu s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. Súťaž riadi Slovenská komisia MO, v jednotlivých okresoch okresné komisie MO. Na jednotlivých školách súťaž zaisťujú učitelia matematiky.

Vy sa vždy obracajte na svojho učiteľa matematiky.

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta PEDAS Žilinskej univerzity, Univerzitná 1, 010 26 Žilina

56. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií Z4 - Z9, I. kolo, domáca časť

Autori úloh: PaedDr. S. Bednářová, PhD., RNDr. M. Dillingerová, PhD., Doc. RNDr. L. Hozová, CSc., Mgr. Marie Krejčová, Mgr. Š. Ptáčková, Mgr. M. Raabová, L. Šimůnek, Doc. RNDr. P. Tlustý, CSc., Doc. RNDr. M. Volfová, PhD.

Vydala IUVENTA pre vnútornú potrebu rezortu Ministerstva školstva SR
Miesto a rok vydania: Bratislava, 2006
Neprešlo jazykovou úpravou
Grafická úprava: RNDr. M. Dillingerová, PhD.
Zodpovedný redaktor: Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.