

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Komentáre a riešenia úloh domáceho kola pre
žiakov základných škôl
a nižších ročníkov osemročných gymnázií

Kategórie Z4, Z5

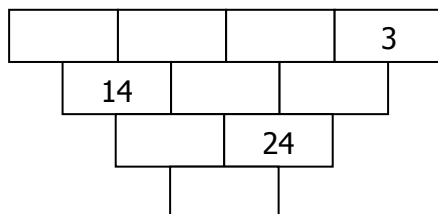
59. ročník

Školský rok 2009/2010

KATEGÓRIA Z4

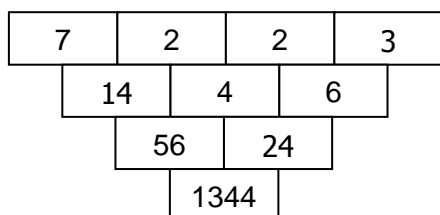
Z4-I-1

Doplňte čísla do súčinovej pyramídy. Každé číslo v tehličkách (od druhého riadku) je rovné súčinnu čísel v tehličkách bezprostredne nad ním. V prvom riadku sú iba jednociferné čísla.



(M. Kollár)

Riešenie:



Z4-I-2

Janka delila lentilky sebe a sestre Danke. Sebe dala 11 lentiliek, Danke 2. Potom sebe 10 a Danke 4. Potom sebe 9 a Danke 6... týmto spôsobom sebe dala vždy o 1 menej a Danke o 2 viac ako predtým. V delení pokračovala, až sa jej lentilky minuli. Na svoje i Dankino počudovanie dievčatá zistili, že majú lentiliek rovnako. Koľko bolo všetkých lentiliek?

(M. Dillingerová)

Riešenie:

Janka		Danke		Rovnako?
11	11	2	2	nie
10	21	4	6	nie
9	30	6	12	nie
8	38	8	20	nie
7	45	10	30	nie
6	51	12	42	nie
5	56	14	56	áno
4	60	16	72	môže byť

Janka mohla mať 112 lentiliek a minuli sa jej po tom, akodala Danke 14. Alebo mala 120 lentiliek, sebe dala naposledy 4 a Danke miesto 16 tiež už len posledné 4.

(Predpokladáme, že deti prídu iba na číslo 112. Takéto riešenie ohodnoťte stupňom 2 – dobre.)

Z4-I-3

Doplň čísla od 1 do 12 (každé práve raz) do tabuľky. V jednotlivých riadkoch sú príklady na sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie a tie musia byť všetky splnené. Navyše v každom riadku sú dopĺňané čísla usporiadané zľava doprava od najväčšieho po najmenšie.

	+		+		=	33
	-		-		=	0
	.		.		=	35
	:		:		=	1

(M. Kollár)

Riešenie:

Pre prvý riadok (súčet 33) existuje jediná možnosť doplnenia: čísla 12,11 a 10.

Potom sa treba zamyslieť nad druhým riadkom. Sem môžeme dopísať iba čísla 7, 5, 1.

Do posledného treba dosadiť zložené číslo, ktorým by mohla byť 9, 8, 6, 4. Ak sa má dať deliť dvomi rôznymi číslami (a jednotku už nemôžeme použiť), ostane nám 8 a 6. Skúsime 8.

Do druhého riadka ostali čísla 9, 6, 3, ktoré sa tam doplniť dajú.

12	+	11	+	10	=	33
9	-	6	-	3	=	0
7	.	5	.	1	=	35
8	:	4	:	2	=	1

Ak skúsime 6, použijeme do posledného riadka ešte 3 a 2. Do druhého riadka ostali čísla 9, 8, 4, ktoré sa tam doplniť nedajú. Existuje jedno riešenie (viď vyššie).

Z4-I-4

Jurko chodí domov zo školy okolo školského latkového plotu. V pondelok sa rozhodol, že cestou zo školy bude na každú druhú latku robiť značku bielou kriedou. V utorok, stredu i štvrtok to zopakoval s každou druhou ešte neoznačenou latkou. V piatok ráno zistil, že mu ostalo už iba 7 latiek neoznačených. Koľko najmenej a koľko najviac latiek mohol mať plot školy?

(M. Dillingerová)

Riešenie:

Aby ostalo 7 neoznačených, musel najmenej 6 a najviac 7 označiť. Teda vo štvrtok ráno bolo buď 13 alebo 14 latiek neoznačených. Podobne v stredu ráno mohlo byť 25, 26, 27 alebo 28 neoznačených. V utorok už to bolo od 49 do 56 a v pondelok od 97 do 112. Najmenej mohol mať plot 97 a najviac 112 latiek.

Z4-I-5

Samo má tri staršie sestry. Každá robí niečo iné a každá chová jedno zvieratko. Ľudka hrá tenis. Najmladšia je klaviristka. Ivana neštuduje jazyky. Mária nie je prostredná. Na klavíri sedáva veľká čierna mačka. Prostredná má papagája. Tretím zvieratkom je pes. Vypíš, ako sa volá najstaršia sestra, čo robí a aké zviera chová.

(M. Dillingerová)

Riešenie:

Najmladšia je Ivana, hrá na klavíri a chová mačku.
 Prostredná je Ľudka, hrá tenis a má papagája.
 Najstaršia je Mária, študuje jazyky a má psa.

Z4-I-6

Martin má vystrihnutý z papiera jeden obdĺžnik s rozmermi 2 cm a 6 cm. Okrem toho má ešte jeden obdĺžnik a jeden štvorec. Zo všetkých troch útvarov vie bez prekryvania a dier zložiť jeden veľký štvorec. Aké rozmery môžu mať jeho útvary? Nájdi dve riešenia.

(M. Dillingerová)

Riešenie:

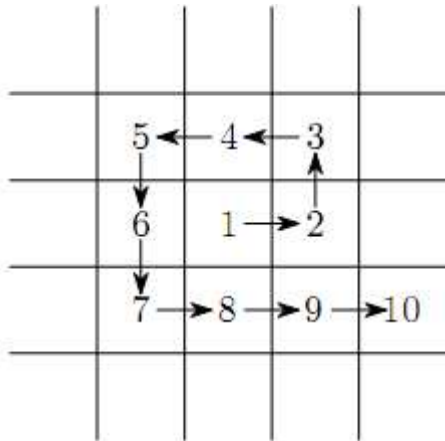
Riešení je viac ako vyžaduje úloha. Jedno možné riešenie je napríklad štvorec 4x4 a obdĺžnik 2x4, alebo štvorec 6x6 a obdĺžnik 2x8, alebo štvorec 2x2 a obdĺžnik 6x8. (Každý rozmer v cm).

(Žiaci by mali spolu s rozmermi odovzdať aj nákres zloženého štvorca.)

KATEGÓRIA Z5

Z5-I-1

Húsenica Leona spadla doprostred štvorcovej siete. Rozhodla sa, že polezie „do špirály“ tak, ako je naznačené na obrázku; na žiadnom štvorčeku nebude dvakrát a žiaden štvorček nevynechá.



Z prvého štvorčeka na druhý liezla smerom na východ, z druhého na tretí smerom na sever, z tretieho na štvrtý smerom na západ, zo štvrtého na piaty tiež na západ, z piateho na šiesty na juh. . . Ktorým smerom liezla z 81. na 82. štvorček?

(M. Petrová)

Riešenie:

Celú situáciu si môžeme predstaviť tak, že húsenica Leona oblieza štvorce. Budeme sledovať, na ktorom políčku takého štvorca skončí a koľkými štvorčekmi už preliezla. Dôležité je zistiť, ktorý z týchto štvorcov obsahuje 81. štvorček.

1. kolo: Štvorček s číslom 1 oblezie Leona dokola. Tým prelezie cez 8 štvorčekov a celkovo už bola na 9 štvorčekoch tvoriacich väčší štvorec 3x3. Nachádza sa juhovýchodne od štvorčeka s číslom 1 a lezie ďalej na východ.

2. kolo: Teraz oblezie dokola štvorec 3x3. To znamená že lezie po okrajových štvorčekoch štvorca 5x5. Celkovo prelezie aj s novými štvorčekmi $5 \cdot 5 = 25$ štvorčekov a opäť bude pokračovať východným smerom.

3. kolo: Veľký štvorec sa opäť zväčší. Čiže bude sa pohybovať po okrajových políčkach štvorca 7x7. Celkovo prelezie aj s novými štvorčekmi $7 \cdot 7 = 49$ štvorčekov a opäť bude pokračovať východným smerom.

4. kolo: Veľký štvorec sa opäť zväčší. Čiže bude sa pohybovať po okrajových políčkach štvorca 9x9. Celkovo prelezie aj s novými štvorčekmi $9 \cdot 9 = 81$ štvorčekov. Ďalší jej pohyb z 81. na 82. štvorček by bol východným smerom.

65	64	63	62	61	60	59	58	57						
66	37	36	35	34	33	32	31	56						
67	38	17	16	15	14	13	30	55						
68	39	18	5	4	3	12	29	54						
69	40	19	6	1	2	11	28	53						
70	41	20	7	8	9	10	27	52						
71	42	21	22	23	24	25	26	51						
72	43	44	45	46	47	48	49	50						
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82					

Poznámka: Žiaci môžu riešenie aj len nakresliť.

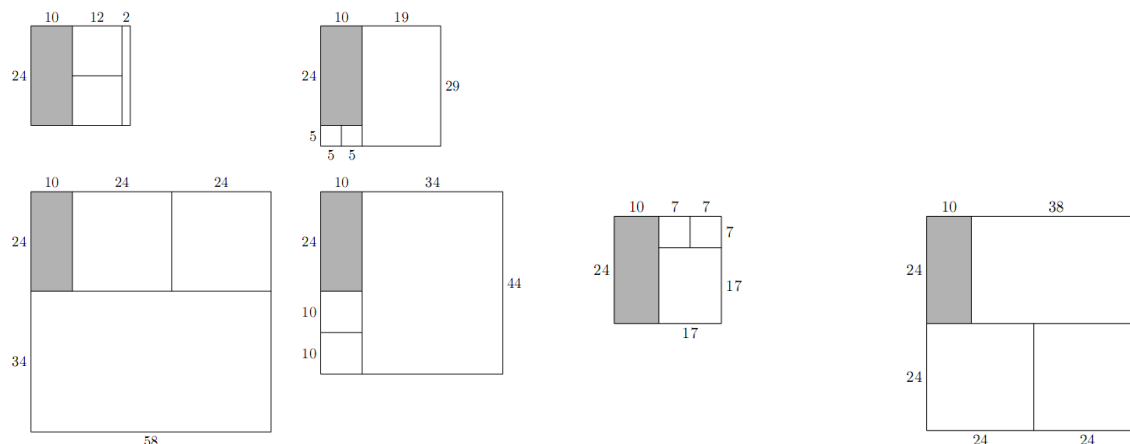
Z5-I-2

Miša si z papiera vystrihla dva rovnaké štvorce, jeden obdĺžnik s rozmermi 10 cm x 24 cm a ešte jeden obdĺžnik. Aké rozmery mohol mať tento obdĺžnik, ak sa zo všetkých štyroch útvarov dal zložiť štvorec bez toho, aby sa jednotlivé diely prekryvali? Takých obdĺžnikov sa dá nájsť niekoľko, uved' aspoň štyri.

(L. Šimúnek)

Riešenie:

Ak chceme pridávať k obdĺžniku dva štvorce, máme viacero možností ich umiestnenia. Podľa toho, kam ich umiestnime, budeme dopočítavať veľkosť druhého obdĺžnika:



Na obrázkoch sú všetky možné riešenia.

Rozmery hľadaného obdĺžnika (v cm x cm) mohli byť: 2x24, 19x29, 34x58, 34x44, 14x17, alebo 24x38. Iné rozmery mať nemohol.

Z5-I-3

Vyrieš nasledujúci algebrogram a nájdi všetky riešenia. Rovnaké písmená nahraď rovnakými číslicami, rôzne rôznymi.

$$\begin{array}{r}
 \text{OSEL} \\
 \text{SEL} \\
 \text{EL} \\
 \hline
 \text{L} \\
 10034
 \end{array}$$

(M. Volfová)

Riešenie:

$$4L = *4$$

Diskusiu začneme od jednotiek. , (* \in {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}) to je možné iba pre $L = 1$ alebo $L = 6$.

$$3E = *3$$

Keby $L = 1$, tak . To je možné iba pre $E = 1$, ale dve rôzne písmená majú predstavovať dve rôzne čísla.

$$3E + 2 = *3, \quad 3E = *1$$

Teda $L = 6$. Potom čiže . To je možné iba pre $E = 7$. Ďalej $2S + 2 = *0, \quad 2S = *8$

čiže . To je možné, ak $S = 4$ alebo $S = 9$.

Ak $S = 4$, tak $O = 9$. Ak $S = 9$, tak $O = 8$

$$\begin{array}{r} 9476 \\ 476 \\ 76 \\ \hline 6 \\ 10034 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8976 \\ 976 \\ 76 \\ \hline 6 \\ 10034 \end{array}$$

Z5-I-4

Nina dostala od pani učiteľky nasledujúce kartičky:



Má z nich zostaviť príklad pre svojich spolužiakov, pričom každú kartičku použije práve raz. Pomôž Nine a zostav jeden taký príklad tak, aby každé delenie vyšlo bezo zvyšku. Aký bude výsledok?

(M. Petrová)

Riešenie:

Príklad musí začínať kartičkou s číslom 17. Preto nesmie byť na druhom mieste kartička s delením. Môžeme postupne skúšať všetky ostatné možnosti – taká tabuľka by bola veľmi rozsiahla. Tu uvedieme iba všetky možné riešenia.

17	.3	51	-4	47	+1	48	:6	8	:4	2
17	.3	51	-4	47	+1	48	:4	12	:6	2
17	.3	51	+1	52	-4	48	:6	8	:4	2
17	.3	51	+1	52	-4	48	:4	12	:6	2

Z5-I-5

Našich 84 žiakov išlo do kina. Lístok síce stál 2€, ale každý 12. žiak mal polovičnú zľavu a každý 35. vstup zdarma. Koľko stálo vstupné pre všetkých žiakov?

(M. Volfová)

Riešenie:

Keďže $84 : 12 = 7$, malo 7 žiakov polovičnú zľavu, ich lístok stál 1€. Boli to: 12., 24., 36., 48., 60., 72. a 84. lístok. Keďže $84 : 35 = 2$ (zvyšok 14), mali ďalší dvaja žiaci vstup zadarmo. Boli to 35. a 70. lístok. Spolu stály vstupenky: $7 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (84 - 2 - 7) \cdot 2 = 7 + 75 \cdot 2 = 157$ (€).

Z5-I-6

Chlapci našli starý plán mýnového poľa (obrázok). Číslo sú na políčkach, kde žiadne míny nie sú, a udávajú počet zamínovaných susedných políčk. Urči, koľko je v poli mín spolu a kde sú. (Políčka susedia práve vtedy, keď majú spoločný vrchol alebo stranu.)

1		2		2
	3		3	
3				3
	2			
			2	

(M. Volfová)

Riešenie:

Plán môžeme začať jednoznačne dopĺňať jedine od poľa s číslom 3 v prvom stĺpci alebo od poľa s číslom 2 v pravom hornom rohu. V oboch prípadoch musia byť na všetkých číslom

neoznačených susedných poliach míny (ozn. *):

1		2	*	2
*	3		3	*
3	*			3
*	2			
			2	

Postupne doplníme na miesta mín * a na miesta, kde míny nesmú byť –.

1	–	2	*	2
*	3		3	*
3	*			3
*	2			
			2	

1	–	2	*	2
*	3		3	*
3	*	–		3
*	2	–		
–	–	–	2	

1	–	2	*	2
*	3	*	3	*
3	*	–		3
*	2	–		
–	–	–	2	

1	–	2	*	2
*	3	*	3	*
3	*	–	–	3
*	2	–		
–	–	–	2	

1	–	2	*	2
*	3	*	3	*
3	*	–	–	3
*	2	–	*	*
–	–	–	2	

1	–	2	*	2
*	3	*	3	*
3	*	–	–	3
*	2	–	*	*
–	–	–	2	

Výsle

dné rozmiestnenie mín je na obrázku:

			*	
*		*		*
	*			
*			*	*

59. ročník Matematickej olympiády

Školský rok 2009/2010

Komentáre pre kategórie Z4, Z5

Zodpovedný redaktor: RNDr. Monika Dillingerová

Vydala IUVENTA s finančnou podporou MŠ SR

© Slovenská komisia Matematickej olympiády, 2009