MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Komentáre a riešenia úloh domáceho kola pre
žiakov základných škôl

a nižších ročníkov osemročných gymnázií

Kategória Z9

59. ročník

Školský rok 2009/2010

KATEGÓRIA Z9

Z9–I–1

Dostal som zadané dve prirodzená čísla. Potom som ich obe zaokrúhlil na desiatky. Ktoré čísla som dostal zadané, ak viete, že súčasne platí:

• podiel zaokrúhlených čísel je rovnaký ako podiel pôvodných čísel,

• súčin zaokrúhlených čísel je o 295 väčší než súčin pôvodných čísel,

• súčet zaokrúhlených čísel je o 6 väčší než súčet pôvodných čísel.

(L. Šimůnek)

Riešenie:

Prirodzené číslo zaokrúhľujeme na desiatky tak, že k nemu pripočítame vhodné celé číslo od -4 do 5. Podľa tretej podmienky zo zadania má byť súčet zaokrúhlených čísel o 6 väčší ako súčet pôvodných čísel. Obe pôvodné čísla sa teda zaokrúhlením museli zväčšiť a musí platiť jeden z nasledujúcich predpokladov:

a) Jedno končí číslicou 5 a druhé číslicou 9. (Označíme ich *p, q*, po zaokrúhlení na desiatky dostaneme $p + 5$, $q + 1$.)
b) Jedno končí číslicou 6 a druhé číslicou 8. (Označíme ich *r, s*, po zaokrúhlení na desiatky dostaneme $r + 4$, $s + 2$.)
c) Jedno končí číslicou 7 a druhé tiež číslicou 7. (Označíme ich *t, u*, po zaokrúhlení na desiatky dostaneme $t + 3$, $u + 3$.)

Podľa druhej podmienky zo zadania je súčin zaokrúhlených čísel o 259 väčší ako súčin pôvodných čísel. Keďže súčin zaokrúhlených musí mať na mieste jednotiek číslicu 0, tak súčin pôvodných musí mať na mieste jednotiek číslicu 5. To je možné iba v prípade a) vyššie (5 . 9 = 45).

Spojením prvej a druhej podmienky dostaneme sústavu rovníc:

$$\frac{p+5}{q+1} = \frac{p}{q},$$

$$(p+5).(q+1) = pq + 295$$

Jej riešením je dvojica čísel $p = 29$, $q = 145$.

Úloha má jediné riešenie.

Z9–I–2

Pat a Mat boli na výlete. Vyšli ráno po ôsmej hodine v čase, keď veľká a malá ručička na Patových hodinkách ležali na opačných polpriamkach. Na opačných polpriamkach ležali ručičky Patových hodiniek aj v čase, keď sa obaja priatelia pred poludním vrátili. Mat dobu trvania výletu meral stopkami. Určite aj vy s presnosťou na sekundy, ako dlho trval výlet. Predpokladajte, že Patove hodinky a Matove stopky išli presne.

(M. Volfová)

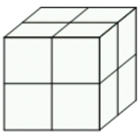
Riešenie:

Rýchlosť malej ručičky je 30° za 60 minút, t.j. 0,5° za 1 min. Rýchlos ť veľkej ručičky je 360° za 60 minút, t.j. 6° za 1 min. Polohu ru čičky na ciferníku, ktorá ukazuje na číslo 12, nazvime „základnou polohou“. O 8:00 je veľká ručička v základnej polohe, malá ukazuje na osmičku, čiže je odklonená o 240° od základnej polohy. Dobu, ktorá uplynie od 8:00 do okamihu, keď ručičky ležali na opačných polpriamkach oxnačíme ako *x* (min). V tom momente je veľká

ručička od základnej polohy odklonená o (°), malá o $240 + 0,5.x$ (°). Ak by sme veľkú otočili ešte o 180°, splynula by so smerom malej ručičky.
Dostávame rovnicu pre čas *x* v minútach $(0 + 6x) + 180 = 240 + 0,5x$,
odkiaľ $x = 10,90$, čo je približne 10 minút a 54,5 sekundy.
Výlet mohol začať najskôr o 8:10:54,5. (Podobne sa dá nájsť čas medzi deviatou a desiatou, desiatou a jedenástou a jedenástou a dvanástou.)
Pre návrat budeme hľadať čas medzi jedenástou a dvanástou. *y* bude vyjadrovať dobu v minútach, ktorá uplynula od 11:00 do okamžiku, kedy výlet skončil.
$(0 + 6y) + 180 = 330 + 0,5y$,
$y = 27,27$, čo je približne 27 minút a 16,4 sekundy.
Výlet skončil najneskôr 11:27:16,4 a mohol trvať až 3 h 16 min 22 s.
(*Poznámka: Mnohí žiaci si ani neuvedomia, že aj čas 9:40 je po ôsmej a pred obedom. Preto uvádzame tento najdlhší čas ako riešenie. Ďalšie riešenia nie sú na škodu.*)

Z9–I–3

Na obrázku je kocka s hranou dĺžky 2 cm tvorená ôsmimi kocôčkami s hranou dĺžky 1 cm. Osem stien kocôčok je nafarbených na čierno, ostatné sú biele. Pritom sa z nich dá zložiť kocka, ktorej povrch je biely. Koľkými spôsobmi môžu byť kocôčky nafarbené? Predpokladajte, že rovnako nafarbené kocôčky nedokážeme odlíšiť, možno ich teda zamieňať.



(K. Pazourek)

Riešenia:

Zo zadania vyplýva, že každá z ôsmich kocôčok, z ktorých je zložená veľká kocka, má určite tri biele steny so spoločným vrcholom. Ostatné steny kocôčok sú buď biele alebo čierne. Celkom má byť čiernych osem stien, pritom nezáleží, ako kocôčky usporiadame, dôležité je len, koľko stien majú nafarbených. Navyše nezáleží, ktorú stenu v poradí sme farbili. Napríklad prvá a tretia čierna je to isté ako prvá a druhá čierna – kocôčku stačí vhodne otočiť.
Vypíšme si teda všetky možnosti počtu čiernych stien na kocôčkách.

- 3,3,2,0,0,0,0,0,
- 3,3,1,1,0,0,0,0,
- 3,2,2,1,0,0,0,0,
- 3,2,1,1,1,0,0,0,
- 3,1,1,1,1,1,0,0,
- 2,2,2,2,0,0,0,0,
- 2,2,2,1,1,0,0,0,
- 2,2,1,1,1,1,0,0,
- 2,1,1,1,1,1,1,0,
- 1,1,1,1,1,1,1,1.

Dostávame tak celkom 10 rôznych farbení kocôčok.

Z9–I–4

Adam a Eva dostali košík, v ktorom bolo 31 jabĺk. Prvý deň zjedla Eva tri štvrtiny toho, čo zjedol Adam. Druhý deň zjedla Eva dve tretiny toho, čo zjedol druhý deň Adam. Druhý deň večer bol košík prázdny. Koľko jabĺk zjedla z košíku Eva? (Adam i Eva jablká jedia celé a nedelia si ich.)

(L. Hozová)

Riešenie:

Podľa zadania zjedla Eva prvý deň tri štvrtiny toho čo Adam. Počet jabĺk ktoré zjedol Adam prvý deň musí byť násobkom štyroch. Označme ho , kde a je neznáme prirodzené číslo. Eva za prvý deň zjedla teda jabĺk. Druhý deň (podobne kvôli deliteľnosti) zjedol Adam a Eva jabĺk, kde b je neznáme prirodzené číslo. Vieme, že platí:
, čiže .

Postupne môžeme za a dosadzovať prirodzené čísla a hľadať k nim b .

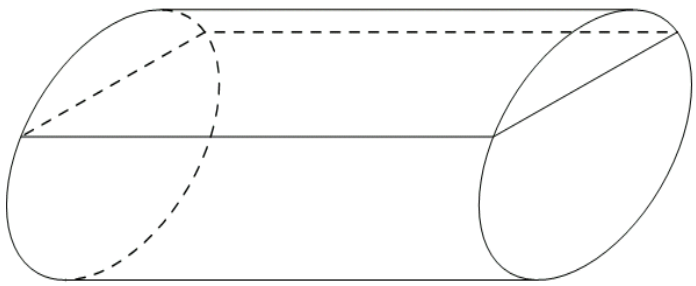
a	1	2	3	4	5
b	neexistuje	neexistuje	2	neexistuje	neexistuje

a nemôže byť väčšie ako 4, lebo $7.5 > 31$

Prvý deň zjedla Eva 9 jabĺk,druhý deň 4 jablká. Spolu zjedla Eva 13 jabĺk.

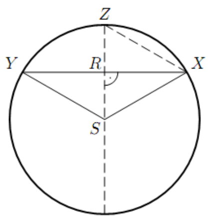
Z9–I–5

Vodič preváža mlieko v cisterne tvaru valca. Priemer podstavy je 180 cm, dĺžka cisterny je 4m. Koľko hl mlieka je v cisterne, ak je naplnená do troch štvrtín priemeru?



(M. Krejčová)

Riešenie:



Časť podstavy,ktorá je pod hladinou mlieka v cisterne,rozdelíme na nekonvexný kruhový výsek a rovnoramenný trojuholník *XYS*. $|XS| = |SZ| = r = 90$ cm. Podľa zadania je bod R stredom úsečky *SZ*, t.j. $|RS| = |RZ| = \frac{r}{2}$. Odtiaľ vyplýva, že (pravouhlé) trojuholníky *SXR* a *ZXR* sú zhodné, čiže $|XZ| = |SX| = r$ a trojuholník *SXZ* je rovnostranný. Preto je veľkosť vnútorného uhla *RSX* rovná 60°, veľkosť vnútorného uhla *XSY* je120° a ve ľkosť vonkajšieho uhla XSY je 240°. Nekonvexný kruhový výsek má teda obsahu celého kruhu:

$$S_v = \frac{2}{3}\pi r^2 .$$

Obsah trojuholníka *XYS* je rovný $S_t = |RX|.|RS|$. Kde $|RS| = \frac{r}{2}$ a podľa Pytagorovej vety

$$|RX| = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r .$$

Po dosadení dostávame $S_t = |RX|.|RS| = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

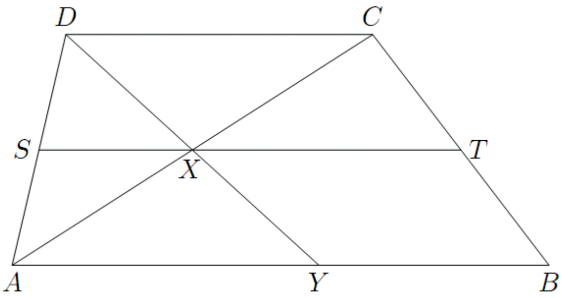
Cisterna má dĺžku $d = 40$ dm,objem prevážaného mlieka je teda

$$V = S.d = (S_t + S_v).d = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 + \frac{2}{3}\pi r^2\right).40 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{3}\pi\right).81.40 \doteq 8200\ [dm^3] = 82\ [hl]$$

.

Z9–I–6

V lichobežníku *ABCD* so základňami *AB* a *CD* dĺžok 7 cm a 4 cm sú body *S* a *T* stredy strán *AD* a *BC*, pozri obrázok. Bod *X* je priesečník úsečiek *AC* a *ST*, bod *Y* je priesečník úsečky *AB* a priamky *DX*. Obsah štvoruholníka *AYCD* je 12 cm^2. Vypočítajte obsah lichobežníka *ABCD*.



(M. Dillingerová)

Riešenie:

Úsečka *ST* spája stredy ramien lichobežníka *ABCD*, preto musí byť rovnobežná s jeho základňou *CD*. Úsečka *SX*, ktorá leží na úsečke *ST*, je teda rovnobežná so stranou *CD* trojuholníka *CDA*. Ďalej vieme, že jej krajný bod *S* je stred strany *DA*. Úsečka *SX* je preto strednou priečkou trojuholníka *CDA*. Obdobne sa dá dokázať, že úsečka *SX* je strednou priečkou trojuholníka *AYD*. Pre strednú priečku trojuholníka všeobecne platí, že má dvakrát menšiu dĺžku ako s ňou rovnobežná strana trojuholníka. Dĺžka úsečky *SX* je dvakrát menšia ako dĺžka strany *CD* a zároveň je dvakrát menšia ako dĺžka strany *AY*. Dĺžky úsečiek *CD* a *AY* preto musia byť rovnaké a obe sú 4 cm.

Nakoľko rovnobežné strany *AY* a *CD* štvoruholníka *AYCD* majú rovnakú dĺžku, musí sa jednať o kosodĺžnik. Pre výpočet jeho obsahu platí $S_1 = |CD|.v$, kde v je dĺžka jeho výšky na stranu *CD*. Zo zadania poznáme S_1 a $|CD|$, takže dopočítame v :

$$v = S_1 : |CD| = 12 : 4 = 3\ [cm]$$

Odtiaľ potom obsah lichobežníka je:

$$S_2 = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot v = \frac{7+4}{2} \cdot 3 = 16{,}5\ [cm^2]$$

.

59. ročník Matematickej olympiády

Školský rok 2009/2010

Komentáre pre kategóriu Z9

Zodpovedný redaktor: RNDr. Monika Dillingerová

Vydala IUVENTA s finančnou podporou MŠ SR