1. *Dokážte, že rovnica* $x^2 + p|x| = qx - 1$ *s reálnymi parametrami* p, q *má v obore reálnych čísel štyri riešenia práve vtedy, keď platí* $p + |q| + 2 < 0$.

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Zo zadania je zrejmé, že číslo 0 nie je riešením danej rovnice pre žiadne hodnoty parametrov p, q. Zbavme sa preto absolútnej hodnoty v rovnici konštatovaním, že všetky jej riešenia sú *kladné* korene rovnice

$$x^2 + px = qx - 1, \quad \text{čiže} \quad x^2 + (p - q)x + 1 = 0, \tag{1}$$

spolu so *zápornými* koreňmi rovnice

$$x^2 - px = qx - 1, \quad \text{čiže} \quad x^2 - (p + q)x + 1 = 0. \tag{2}$$

Keďže každá kvadratická rovnica má nanajvýš dva korene, skúmaná situácia celkového počtu štyroch riešení nastane práve vtedy, keď rovnica (1) bude mať dva *rôzne kladné* korene a súčasne rovnica (2) bude mať dva *rôzne záporné* korene. Rozborom týchto podmienok sa teraz budeme zaoberať.

Je jasné, že oba diskriminanty $(p - q)^2 - 4$ a $(p + q)^2 - 4$ rovníc (1) a (2) musia byť kladné, čo vedie k nutným podmienkam

$$(p - q)^2 > 4 \quad \text{a} \quad (p + q)^2 > 4. \tag{3}$$

Ak sú splnené, stačí skúmať otázku, kedy *menší* koreň rovnice (1) je *kladný* a súčasne *väčší* koreň rovnice (2) *záporný*. Podľa vzťahov pre korene kvadratickej rovnice to možno zapísať nerovnosťami

$$\frac{q - p - \sqrt{(p - q)^2 - 4}}{2} > 0 \quad \text{a} \quad \frac{p + q + \sqrt{(p + q)^2 - 4}}{2} < 0. \tag{4}$$

(Znamienka pre menší, resp. väčší koreň sme vybrali na základe toho, že menovatele oboch zlomkov sa rovnajú *kladnému* číslu 2.) Z prvej nerovnosti zapísanej v ekvivalentnom tvare

$$q - p > \sqrt{(p - q)^2 - 4} \tag{5}$$

vyplýva $q - p > 0$, takže prvú nerovnosť v (3) možno spresniť na $q - p > 2$. Potom už nerovnosť (5) zrejme platí, lebo

$$q - p = \sqrt{(p - q)^2} > \sqrt{(p - q)^2 - 4}.$$

Tak sme ukázali, že rovnica (1) má dva rôzne kladné korene práve vtedy, keď platí $q - p > 2$, čo je prvá z dvojice podmienok

$$p - q + 2 < 0, \quad p + q + 2 < 0. \tag{6}$$

Rovnakým postupom overíme, že druhá podmienka v (6) je nutnou a postačujúcou podmienkou pre existenciu dvoch rôznych záporných koreňov rovnice (2). Stačí upraviť druhú nerovnosť z (4) na tvar

$$\sqrt{(p+q)^2-4} < -(p+q) \qquad \text{(odkiaľ vyplýva } p+q<0)$$

a pre záporné číslo $p+q$ tak získať konečnú podmienku v tvare $p+q<-2$, čo je druhá z nerovností (6); tie preto presne vymedzujú skúmanú situáciu.

Na dokončenie celého riešenia ostáva zdôvodniť ekvivalenciu

$$(p-q+2<0 \ \wedge \ p+q+2<0) \ \Leftrightarrow \ p+|q|+2<0.$$

To je jednoduché, pretože zo zrejmej rovnosti $|q|=\max\{-q,q\}$ vyplýva

$$p+|q|+2=\max\{p-q+2, p+q+2\}$$

a maximum z dvoch reálnych čísel je záporné práve vtedy, keď sú obe záporné.

Iné riešenie. Najskôr postupujme zhodne s prvým riešením až po odvodenie nerovností (3), ktoré, pripomeňme, zaručujú existenciu dvoch rôznych reálnych koreňov rovnice (1), resp. rovnice (2). Označíme ich postupne $x_{1,2}$ a $x_{3,4}$ a zapíšeme ich vzťah ku koeficientom rovníc, vyjadrený známymi Viètovými vzorcami

$$x_1+x_2=-(p-q), \quad x_1x_2=1, \quad x_3+x_4=p+q, \quad x_3x_4=1. \tag{7}$$

Z rovnosti $x_1x_2=1$ vyplýva, že korene $x_{1,2}$ majú rovnaké znamienko. Sú teda kladné práve vtedy, keď je kladný ich súčet, ktorý je však podľa prvej rovnosti v (7) rovný $-(p-q)$. Získanú nerovnosť $p-q<0$ možno spolu s podmienkou $(p-q)^2>4$ vyjadriť jedinou nerovnosťou $p-q<-2$ (čiže $p-q+2<0$), ktorá je teda kritériom toho, kedy rovnica (1) má dva rôzne kladné korene. Podobne pre existenciu dvoch záporných koreňov rovnice (2) dostaneme kritérium $p+q+2<0$. Záverečný prevod oboch nerovností na jednu ekvivalentnú nerovnosť s absolútnou hodnotou zdôvodníme rovnako ako v prvom riešení.

Iné riešenie. Rovnako ako pri predchádzajúcich postupoch prejdeme k rovniciam (1) a (2), ktoré sú obe rovnakého typu $x^2+rx+1=0$. Existenciu dvoch rôznych kladných či záporných koreňov takej rovnice teraz posúdime úvahou o príslušnej kvadratickej funkcii $f(x)=x^2+rx+1$ s parametrom r, ktorej grafom je parabola otočená nahor. Preto má funkcia f dva rôzne nulové body, povedzme u a v, práve vtedy, keď má aspoň jednu zápornú hodnotu. Taká hodnota sa navyše nadobúda práve v bodoch, ktoré ležia medzi u a v. Všimnime si ešte, že bez ohľadu na hodnotu parametra r pre prípadné nulové body u, v funkcie f platí $uv=f(0)=1$, takže to sú dve navzájom prevrátené čísla, ktoré sú zároveň kladná alebo zároveň záporné. Obe kladné (resp. záporné) sú teda práve vtedy, keď medzi nimi leží číslo 1 (resp. číslo -1). Pre prvý prípad tak dostávame jedinú podmienku $f(1)<0$ (čiže $2+r<0$), pre druhý prípad jedinú podmienku $f(-1)<0$ (čiže $2-r<0$). Zostáva dodať, že v rovnici (1) je $r=p-q$ a v rovnici (2) je $r=-(p+q)$, takže znovu dostávame dvojicu nerovností (6).

Iné riešenie. (*Stručne.*) Daná rovnica je ekvivalentná s rovnicou

$$x+p\cdot\frac{|x|}{x}-q=-\frac{1}{x}. \tag{8}$$

Grafom funkcie $f(x) = -1/x$ je hyperbola skladajúca sa z častí, ktoré označme h_1 (pre $x < 0$) a h_2 (pre $x > 0$). Grafom funkcie $g(x) = x + p \cdot |x|/x - q$ sú dve polpriamky

$$a\colon\ x < 0,\ y = x - p - q \qquad \text{a} \qquad b\colon\ x > 0,\ y = x + p - q.$$

Rovnica (8) má 4 riešenia práve vtedy, keď polpriamka a pretína krivku h_1 v dvoch bodoch a polpriamka b pretína v dvoch bodoch krivku h_2. Polpriamka a pretína h_1 v dvoch bodoch práve vtedy, keď leží „vyššie“ ako dotyčnica s ňou rovnobežná; táto dotyčnica prechádza bodom $(-1, 1)$ a odtiaľ máme podmienku $-1-p-q > 1$. Podobne polpriamka b pretína h_2 v dvoch bodoch práve vtedy, keď leží „nižšie“ ako dotyčnica prechádzajúca bodom $(1, -1)$, teda $1 + p - q < -1$. Dvojica nerovností $-1 - p - q > 1$ a $1 + p - q < -1$ je splnená práve vtedy, keď $q < -p - 2$ a súčasne $-q < -p - 2$. To platí práve vtedy, keď $|q| < -p - 2$, čiže $p + |q| + 2 < 0$.

Za úplné riešenie je 6 bodov, z toho 1 bod za prechod od podmienok (6) k podmienke s absolútnou hodnotou (či naopak). Pri neúplných riešeniach dajte 2 body za odvodenie podmienok (3) z diskriminantov rovníc (1), (2) a 1 bod za výpis nerovností (4) či Viètových vzorcov (7). Ak je úplne odvodená iba nutnosť či postačujúcosť zadanej podmienky kvôli tomu, že zrejmé ekvivalencie sú riešiteľom formulované iba ako implikácie, dajte najviac 5 bodov.

---

2. *Daný je rovnobežník $ABCD$ s tupým uhlom ABC. Na jeho uhlopriečke AC v polrovine BDC zvoľme bod P tak, aby platilo $|\measuredangle BPD| = |\measuredangle ABC|$. Dokážte, že priamka CD je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku BCP práve vtedy, keď úsečky AB a BD sú zhodné.*

(Jaroslav Švrček)

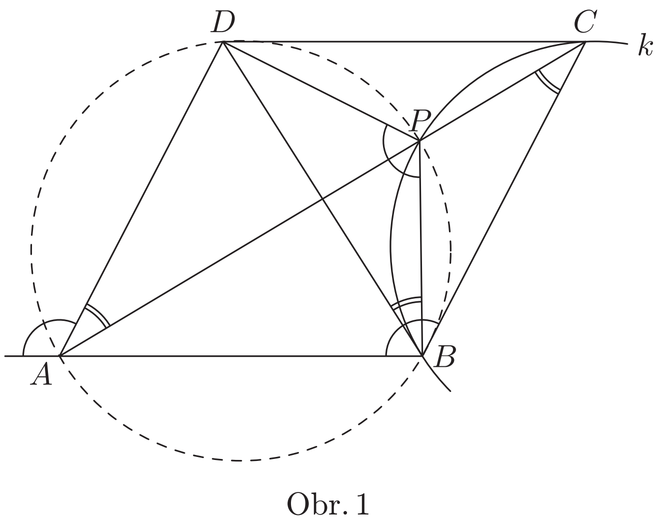
Riešenie. Kvôli lepšej prehľadnosti spomeňme na úvod zrejmé vlastnosti všeobecného rovnobežníka $ABCD$, ktoré v riešení využijeme: súčet uhlov BAD a ABC je priamy uhol a uhly DAC a ACB sú zhodné, rovnako ako strany AB a CD.

Podľa zadania priamka BD oddeľuje body A a P, pričom platí

$$|\measuredangle BAD| + |\measuredangle BPD| = |\measuredangle BAD| + |\measuredangle ABC| = 180^\circ,$$

štvoruholníku $ABPD$ sa teda dá opísať kružnica (obr. 1). V nej sú preto zhodné obvodové uhly DBP a DAP, z čoho vyplýva

$$|\measuredangle DBP| = |\measuredangle DAP| = |\measuredangle DAC| = |\measuredangle ACB| = |\measuredangle BCP|.$$



Obr. 1

Keďže priamka BP oddeľuje body C a D, môžeme použiť vetu o obvodovom a úsekovom uhle pre tetivu BP kružnice k opísanej trojuholníku BCP: Z odvodenej zhodnosti uhlov BCP a DBP vyplýva, že priamka BD je dotyčnicou ku kružnici k (s bodom dotyku B). Po tomto zistení už ľahko dokážeme obe požadované implikácie.

(i) Ak je priamka CD dotyčnicou ku kružnici k, zo symetrie oboch dotyčníc CD a BD vyplýva $|CD| = |BD|$, čiže $|AB| = |BD|$.

(ii) Ak naopak $|AB| = |BD|$, čiže $|CD| = |BD|$, leží bod D na osi tetivy BC kružnice k, takže jej dotyčnicou je nielen priamka BD, ale aj súmerne združená priamka CD.

Za úplné riešenie je 6 bodov, z toho 2 body za objav tetivového štvoruholníka $ABPD$, 2 body za zdôvodnenie, že priamka BD je dotyčnicou kružnice k a po 1 bode za jednotlivé implikácie (i) a (ii). Príslušné polohy bodov pre závery o obvodových, príp. úsekových uhloch sú zo zadania natoľko zrejmé, že absenciu ich popisu v žiackych riešeniach nepenalizujte.

---

3. *Určte všetky celé kladné čísla m, n také, že n delí $2m-1$ a m delí $2n-1$.*

(Tomáš Szaniszlo)

Riešenie. Hľadáme práve tie dvojice celých kladných čísel m a n, pre ktoré existujú celé kladné čísla k a l také, že

$$2m-1 = kn \quad \text{a} \quad 2n-1 = lm. \tag{1}$$

Pozerajme sa na čísla k, l ako na parametre a riešme sústavu lineárnych rovníc (1) pre neznáme m, n. Keď napríklad k dvojnásobku prvej rovnice pripočítame k-násobok druhej rovnice, eliminujeme tým neznámu n a po úprave dostaneme prvú z rovníc

$$(4-kl)m = k+2 \quad \text{a} \quad (4-kl)n = l+2; \tag{2}$$

druhú rovnicu získame analogicky. Keďže pravé strany rovníc (2) sú kladné, vyplýva z tvaru ľavých strán podmienka $4-kl > 0$, čiže $kl < 4$. To je pre celé kladné čísla k, l natoľko obmedzujúce, že jednotlivé možné prípady $kl = 1$, $kl = 2$ a $kl = 3$ ľahko postupne rozoberieme.

V prípade $kl = 1$ musí byť $k = l = 1$ a z rovníc (2), ktoré prejdú na tvar $3m = 3$ a $3n = 3$, nachádzame prvú vyhovujúcu dvojicu $m = n = 1$.

Prípad $kl = 2$ vôbec rozoberať nemusíme, pretože podľa ľavých strán rovníc (1) vidíme, že čísla k, l, m, n z pravých strán musia byť (v každom, nielen v tomto prípade) nepárne.

V prípade $kl = 3$ je nutne $\{k, l\} = \{1, 3\}$, čo po dosadení do rovníc (2) dáva riešenie $m = 5$ a $n = 3$, alebo naopak $m = 3$ a $n = 5$.

Záver. Všetky hľadané dvojice (m, n) sú $(1, 1)$, $(3, 5)$ a $(5, 3)$.

Iné riešenie. Úvahy s nerovnosťami vedúce k úplnému vyriešeniu úlohy môžeme rôznymi spôsobmi meniť. Pozrime sa teda, akými cestami sa možno od počiatočných predpokladov $m \mid 2n-1$ a $n \mid 2m-1$ uberať.

Prvý postup. Keby neplatilo $m = 2n-1$ ani $n = 2m-1$, boli by čísla $2n-1$ a $2m-1$ aspoň dvojnásobkami postupne čísel m a n, teda by platili nerovnosti $2n-1 \geqq 2m$ a $2m-1 \geqq 2n$. Tie sa však navzájom vylučujú, lebo znamenajú $2n > 2m$, resp. $2m > 2n$. Preto musí platiť aspoň jedna z rovností $m = 2n-1$ alebo $n = 2m-1$.

Ak $m = 2n - 1$, tak $2m - 1 = 4n - 3$ a zostávajúca podmienka $n \mid 2m - 1$ tak prechádza na tvar $n \mid 4n - 3$, čiže $n \mid 3$. To spĺňajú iba čísla $n = 1$ a $n = 3$, ktorým podľa vzťahu $m = 2n - 1$ zodpovedajú postupne hodnoty $m = 1$ a $m = 5$. Druhý prípad, keď $n = 2m - 1$, sa od prvého líši len zámenou úloh m a n, takže pri ňom dostaneme ešte tretiu vyhovujúcu dvojicu $m = 3$ a $n = 5$.

Druhý postup. Vzhľadom na symetriu môžeme predpokladať, že platí $m \leqq n$, z čoho vyplýva $2m - 1 \leqq 2n - 1 < 2n$. Číslo $2m - 1$ je tak násobkom čísla n menším než $2n$, musí to teda byť samo číslo n. Tak sme odvodili rovnosť $2m - 1 = n$. Zvyšok úvah je už rovnaký ako pri prvom postupe.

Tretí postup. Všimnime si, že číslo $2m + 2n - 1$ je deliteľné každým z oboch čísel m a n, ktorá sú navyše nesúdeliteľné, lebo napr. číslo m je deliteľom čísla $2n - 1$, ktoré je s číslom n zrejme nesúdeliteľné. Preto je číslo $2m + 2n - 1$ deliteľné aj súčinom mn, takže platí nerovnosť $mn \leqq 2m + 2n - 1$, čiže $(m - 2)(n - 2) \leqq 3$. Z toho vyplýva, že obe čísla m, n nemôžu byť väčšie ako 3; vzhľadom na symetriu rozoberieme iba prípad $m \leqq 3$. Pre $m = 1$ z podmienky $n \mid 2m - 1$ vyplýva $n = 1$, pre $m = 2$ je podmienka $m \mid 2n - 1$ nesplniteľná, pre $m = 3$ máme podmienky $3 \mid 2n - 1$ a $n \mid 5$, ktoré spĺňa jedine $n = 5$.

Za úplné riešenie je 6 bodov. Za rôzne úvahy o nerovnostiach dajte 1 až 4 body, napr. 1 bod za rozlíšenie prípadov $m \leqq n$ a $n \leqq m$, 2 body za účinné použitie implikácie $(a \neq b \wedge a \mid b) \Rightarrow b \geqq 2a$, 4 body za dôkaz poznatku, že nastane aspoň jedna z rovností $m = 2n - 1$, $n = 2m - 1$. Ak riešiteľ objaví všetky tri vyhovujúce trojice, avšak nedokáže, že iné riešenia neexistujú, dajte 1 bod.

---

4. *V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme O stred kružnice vpísanej, P stred kružnice pripísanej ku strane BC a D priesečník osi uhla CAB so stranou BC. Dokážte, že platí*

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}.$$

(Kružnica pripísaná ku strane BC je taká kružnica, ktorá sa dotýka jednak strany BC, jednak oboch polpriamok opačných k polpriamkam BA a CA.)

(Pavel Leischner)

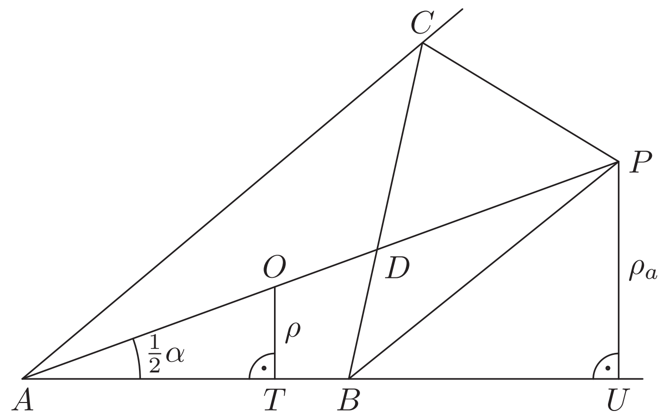
Riešenie. Označme zvyčajným spôsobom dĺžky strán a veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Pre polomery ϱ, ϱ_a kružnice vpísanej, resp. pripísanej ku strane BC trojuholníka ABC s obsahom S platia známe vzťahy

$$\varrho = \frac{2S}{a+b+c} \qquad \text{a} \qquad \varrho_a = \frac{2S}{b+c-a}.$$

(Na ich odvodenie stačí uvažovať rovnosti $S = S_{BCO} + S_{ABO} + S_{ACO}$, resp. $S = S_{ACP} + S_{ABP} - S_{BCP}$ a uvedomiť si, že ϱ, resp. ϱ_a je spoločná výška príslušnej trojice trojuholníkov na strany pôvodného trojuholníka.)

Keďže stredy O, P ležia na osi vnútorného uhla BAC, sú ϱ, ϱ_a odvesnami protiľahlými k uhlu $\frac{1}{2}\alpha$ pravouhlých trojuholníkov s preponami AO, resp. AP (obr. 2), takže platí $\varrho = |AO| \sin \frac{1}{2}\alpha$ a $\varrho_a = |AP| \sin \frac{1}{2}\alpha$. Spolu dostávame vyjadrenie pravej strany dokazovanej rovnosti v tvare

$$\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\varrho} + \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\varrho_a} =$$
$$= \frac{\big((a+b+c) + (b+c-a)\big) \sin \frac{1}{2}\alpha}{2S} = \frac{(b+c) \sin \frac{1}{2}\alpha}{S}.$$



Obr. 2

Na druhej strane je obsah S súčtom obsahov trojuholníkov ABD a ACD, ktoré vyjadríme pomocou dĺžok ich strán z vrcholu A a sínusu nimi zovretého (zhodného) uhla $\frac{1}{2}\alpha$:

$$S = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{c|AD|\sin\frac{1}{2}\alpha}{2} + \frac{b|AD|\sin\frac{1}{2}\alpha}{2} = \frac{(b+c)|AD|\sin\frac{1}{2}\alpha}{2}.$$

Odtiaľ ľahko obdržíme vyjadrenie

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{S}.$$

Vidíme, že obe strany dokazovanej rovnosti majú rovnakú hodnotu. Tým je celý dôkaz hotový. Dodajme, že vďaka vzťahu $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = bc\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$ možno získaný výsledok zapísať v tvare

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{b+c}{bc\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

Iné riešenie. Využijeme rovnosti $|AT| = \frac{1}{2}(b+c-a)$ a $|AU| = \frac{1}{2}(a+b+c)$ pre body T, U dotyku polpriamky AB s vpísanou, resp. pripísanou kružnicou.[1] Vzhľadom na rovnosti $|AT| = |AO|\cos\frac{1}{2}\alpha$ a $|AU| = |AP|\cos\frac{1}{2}\alpha$ dostaneme nasledujúce vyjadrenie pravej strany dokazovanej rovnosti:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} &= \frac{|AO|+|AP|}{|AP|}\cdot\frac{1}{|AO|} = \frac{|AT|+|AU|}{|AU|}\cdot\frac{1}{|AO|} = \\ &= \frac{b+c}{\frac{1}{2}(a+b+c)}\cdot\frac{1}{|AO|} = \frac{2(b+c)}{a+b+c}\cdot\frac{1}{|AO|}.\end{aligned}$$

[1] Tieto rovnosti sú dobre známe a jednoducho vyplývajú z rovností dĺžok úsekov dotyčníc od vrcholov trojuholníka k bodom dotyku s príslušnou kružnicou.

Vidíme, že na dokončenie dôkazu požadovanej rovnosti stačí ukázať, že

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Z vlastností osi uhla však vieme, že bod D delí stranu BC v pomere dĺžok strán AB a AC, teda $|BD|/|DC| = c/b$, takže $|CD| = ab/(b+c)$. Podobne bod O osi uhla ACD delí protiľahlú stranu AD trojuholníka ACD v pomere

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Odtiaľ

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{|AO|+|OD|}{|AO|} = 1 + \frac{a}{b+c} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Iné riešenie. Uvedieme postup založený na použití sínusovej vety v trojuholníkoch ABO, ABD a ABP.[2] Je zrejmé, že tieto trojuholníky majú pri vrchole B postupne uhly $\frac{1}{2}\beta$, β a $90^\circ + \frac{1}{2}\beta$, zatiaľ čo pri vrcholoch O, D, P majú postupne uhly $90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$, $\gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\frac{1}{2}\gamma$. Preto sínusová veta prináša rovnosti

$$\frac{|AB|}{|AO|} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\beta}, \quad \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{\sin(\gamma+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta}, \quad \frac{|AB|}{|AP|} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta},$$

pričom sme dvakrát využili vzťah $\sin(90^\circ+\delta) = \cos\delta$. Po dosadení do dokazovanej rovnosti tak prichádzame k ekvivalentnej úlohe dokázať pre vnútorné uhly ľubovoľného trojuholníka ABC rovnosť

$$\frac{2\sin(\gamma+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\beta} + \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta}.$$

Po použití vzťahu $\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ a následnom vynásobení oboch strán nenulovým výrazom $\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ prechádzame na úlohu overiť jednoduchšiu rovnosť

$$\sin\Bigl(\gamma+\frac{1}{2}\alpha\Bigr) = \cos\frac{1}{2}\gamma\cdot\cos\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma\cdot\sin\frac{1}{2}\beta.$$

To je už celkom ľahké: výraz napravo je totiž rovný $\cos(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma)$ a rovnosť typu $\sin\delta = \cos\varepsilon$ je zaručená, ak platí $\delta+\varepsilon = 90^\circ$. V našom prípade je však $\delta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$, teda

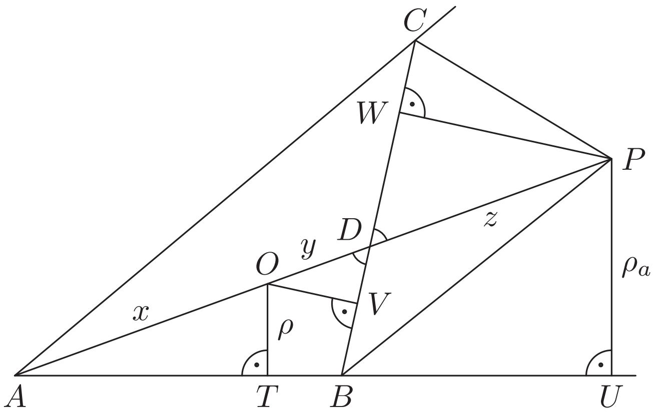
$$\delta+\varepsilon = \gamma + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = 90^\circ$$

a celý dôkaz je tak hotový.

---

[2] S rovnakým úspechom možno využiť aj trojicu trojuholníkov ACO, ACD a ACP.

Iné riešenie. Položme $x = |AO|$, $y = |OD|$ a $z = |DP|$ a podľa obr. 3 označme T, U, V, W body dotyku vpísanej a pripísanej kružnice s priamkami AB, BC. Podľa



Obr. 3

vety *uu* je trojuholník AOT podobný s trojuholníkom APU a tiež trojuholník DOV s trojuholníkom DPW, pritom v oboch prípadoch je koeficient podobnosti rovný pomeru polomerov oboch kružníc. Odtiaľ vyplýva pre prepony spomenutých štyroch trojuholníkov pomer[3]

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{y}{z}. \tag{1}$$

Keďže $x+y+z > z$, a teda aj $x > y$, uvedeným dvom zlomkom sa rovná aj tretí zlomok zostavený z (kladných) rozdielov čitateľov a menovateľov. Platí teda

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{x-y}{(x+y+z)-z} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{2x}{x+y} - 1.$$

Odtiaľ po vydelení kladnou hodnotou x dostaneme

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{2}{x+y} - \frac{1}{x}$$

a po presune druhého zlomku z pravej strany na ľavú už dostaneme dokazovanú rovnosť, lebo

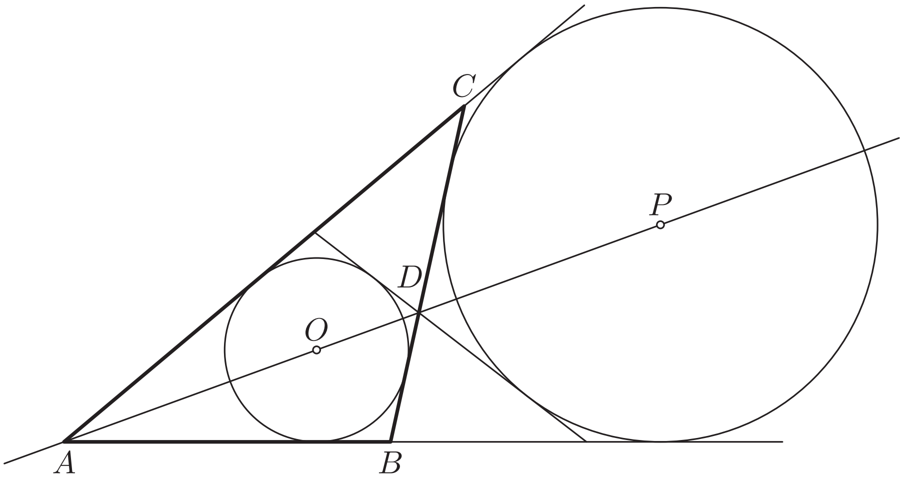
$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{|AP|}, \quad \frac{2}{x+y} = \frac{2}{|AD|} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{|AO|}.$$

Iné riešenie. Obe kružnice sú rovnoľahlé podľa stredov A aj D. Obe rovnoľahlosti majú až na znamienko rovnaké koeficienty a zobrazujú bod O na bod P (obr. 4). Odtiaľ

$$\frac{|DP|}{|DO|} = \frac{|AP|}{|AO|}, \quad \text{čiže} \quad \frac{|AP|-|AD|}{|AD|-|AO|} = \frac{|AP|}{|AO|}.$$

Úpravou poslednej rovnosti dostávame $2|AP|\cdot|AO| = |AD|(|AP|+|AO|)$ a po vydelení nenulovým súčinom $|AP|\cdot|AO|\cdot|AD|$ vyjde vzťah, ktorý sme chceli dokázať.

[3] Jeho platnosť je zaručená aj v prípade $D = V = W$, keď druhá dvojica podobných trojuholníkov je degenerovaná dvojica úsečiek – polomerov skúmaných kružníc.



Obr. 4

Za úplné riešenie je 6 bodov. Známe vzťahy pre dĺžky úsekov strán od vrcholov k bodom dotyku vpísanej a pripísanej kružnice, rovnako ako vzťahy pre ich polomery, nie je potrebné dokazovať. Za vyjadrenie jednotlivých dĺžok $|AD|$, $|AO|$, $|AP|$ pomocou obsahu S, dĺžok b, c a hodnoty $\sin \frac{1}{2}\alpha$ dajte po 1 bode; rovnako pri inom postupe dajte po 1 bode za jednotlivé vyjadrenia zo sínusovej vety pomocou vnútorných uhlov α, β, γ a jednej zo strán b, c. (Také bodové zisky však nemožno sčítať, ak skúška riešiteľ súčasne oba postupy.)

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.