

**59. ročník Matematickej olympiády
2009/2010**

Úlohy krajského kola kategórie A

1. Dokážte, že rovnica $x^2 + p|x| = qx - 1$ s reálnymi parametrami p, q má v obore reálnych čísel štyri riešenia práve vtedy, keď platí $p + |q| + 2 < 0$.
2. Daný je rovnobežník $ABCD$ s tupým uhlom ABC . Na jeho uhlopriečke AC v polrovine BDC zvolíme bod P tak, aby platilo $|\angle BPD| = |\angle ABC|$. Dokážte, že priamka CD je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku BCP práve vtedy, keď úsečky AB a BD sú zhodné.
3. Určte všetky celé kladné čísla m, n také, že n delí $2m - 1$ a m delí $2n - 1$.
4. V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme O stred kružnice vpísanej, P stred kružnice pripísanej ku strane BC a D priesečník osi uhla CAB so stranou BC . Dokážte, že platí

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}.$$

(Kružnica pripísaná ku strane BC je taká kružnica, ktorá sa dotýka jednak strany BC , jednak oboch polpriamok opačných k polpriamkam BA a CA .)

Krajské kolo kategórie A sa koná

v utorok 19. januára 2010

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.