2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z7*

1. *Kremienok a Chocholúšik našli debničku s pokladom. Každý z nich si nabral do jedného vrecka strieborné mince a do druhého vrecka zlaté mince. Kremienok mal na pravom vrecku dieru a cestou polovicu zlatiek stratil. Chocholúšik mal dieru na ľavom vrecku a cestou domov stratil polovicu strieborniakov. Doma venoval Chocholúšik tretinu svojich zlatiek Kremienkovi a Kremienok štvrtinu svojich strieborniakov Chocholúšikovi. Každý potom mal presne 12 zlatiek a 18 strieborniakov. Koľko zlatiek a koľko strieborniakov si vzal každý z nich z nájdeného pokladu?* (*M. Dillingerová*)

Riešenie. Keďže sa strata aj darovanie mincí týka vždy len jedného druhu mincí (buď zlatiek, alebo strieborniakov), budeme ich množstvo počítať oddelene.

Zlatky: Chocholúšikovi zostalo 12 zlatiek, čo sú $\frac{2}{3}$ jeho pôvodného množstva. Priniesol si teda 18 zlatiek a 6 ich dal Kremienkovi. Tomu teda zostalo vo vrecku po príchode domov 6 zlatiek, čo je $\frac{1}{2}$ jeho pôvodného množstva. Odniesol si teda 12 zlatiek.

Strieborniaky: Kremienkovi zostalo 18 strieborniakov, čo sú $\frac{3}{4}$ jeho pôvodného množstva. Priniesol si teda 24 strieborniakov a 6 ich dal Chocholúšikovi. Tomu teda zostalo vo vrecku po príchode domov 12 strieborniakov, čo je $\frac{1}{2}$ jeho pôvodného množstva. Odniesol si teda 24 strieborniakov.

Kremienok si vzal z pokladu 12 zlatiek a 24 strieborniakov, Chocholúšik 18 zlatiek a 24 strieborniakov.

Návrh hodnotenia. Za výpočet množstva mincí prvého druhu každej z postáv dajte 2 body, t. j. dokopy 4 body; za analogický výpočet množstva mincí druhého druhu každého škriatka dajte 1 bod, t. j. dokopy 2 body.

---

2. *Na tabuli sú napísané tri prirodzené čísla x, y, z. Urči ktoré, ak vieš, že súčasne platí:*

- *x je z nich najväčšie,*
- *najmenší spoločný násobok čísel x a y je* 200,
- *najmenší spoločný násobok čísel y a z je* 300,
- *najmenší spoločný násobok čísel x a z je* 120. (*L. Šimůnek*)

Riešenie. Zadané hodnoty najmenších spoločných násobkov rozložíme na súčin prvočísel:

- $n(x, y) = 200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5,$
- $n(y, z) = 300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5,$
- $n(x, z) = 120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$

Do tabuľky budeme postupne zapisovať prvočíselné činitele rozkladov čísel x, y a z, pričom budeme dodržiavať tieto zásady:

- Prvočíslo, ktoré nie je v rozklade najmenšieho spoločného násobku dvoch neznámych, nemôže byť ani v rozkladoch týchto neznámych.
- Koľkokrát je určité prvočíslo v rozklade najmenšieho spoločného násobku dvoch neznámych, toľkokrát musí byť v rozklade jednej z týchto neznámych a maximálne toľkokrát môže byť v rozklade druhej neznámej.

Keďže prvočíslo 2 je v rozklade $n(x, y)$ trikrát, musí byť v riadku x alebo v riadku y trikrát. V rozklade $n(y, z)$ je však prvočíslo 2 len dvakrát, takže v riadku y byť trikrát nemôže. Prvočíslo 2 je teda trikrát v riadku x. Podobne posúdime aj výskyt dvoch prvočísel 5 v rozklade $n(x,y)$ a jedného prvočísla 5 v rozklade $n(x,z)$, a tiež výskyt prvočísla 3 v rozklade $n(y,z)$ a jeho absenciu v rozklade $n(x,y)$. Tabuľka potom vyzerá takto:

x	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots$
y	$5 \cdot 5 \cdots$
z	$3 \cdots$

Ak aj naďalej budeme zo zadania brať do úvahy iba podmienky o najmenších spoločných násobkoch, nedoplníme do tabuľky už žiadne prvočíslo jednoznačne. Všimnime si preto podmienku, že x je z neznámych najväčšie. V riadku x máme zatiaľ menšiu hodnotu ako v riadku y, do riadku x teda musíme ešte nejaký činiteľ doplniť. Prvočíslo 2 je tam už obsiahnuté v maximálnom počte, prvočíslo 3 doplniť nemôžeme, pretože nie je v rozklade $n(x,y)$. Doplniť možno už len prvočíslo 5, avšak iba raz, lebo v rozklade $n(x,z)$ je jedenkrát. Zistili sme teda hodnotu prvej neznámej:

x	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$
y	$5 \cdot 5 \cdots$
z	$3 \cdots$

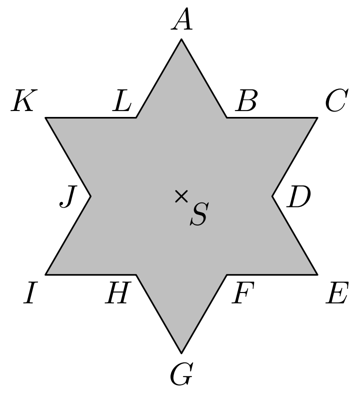
Do riadku y sa nedá dopísať už žiadny činiteľ, y by inak bolo väčšie ako x. Takže $y = 25$. Do riadku z teda musíme kvôli rozkladu $n(y,z)$ doplniť dve prvočísla 2. Hodnota v tomto riadku tak bude 12 a nebudeme môcť doplniť už žiadne prvočíslo 5, lebo potom by hodnota v tomto riadku bola väčšia ako v riadku x. Úloha má teda jediné riešení, ktoré uvádza nasledujúca tabuľka:

x	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$
y	$5 \cdot 5 = 25$
z	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Návrh hodnotenia. 2 body za zistenie, že x je deliteľné ôsmimi, y dvadsiatimi piatimi a z tromi; 2 body za konečné výsledky; ďalšie 2 body podľa kvality zdôvodnenia.

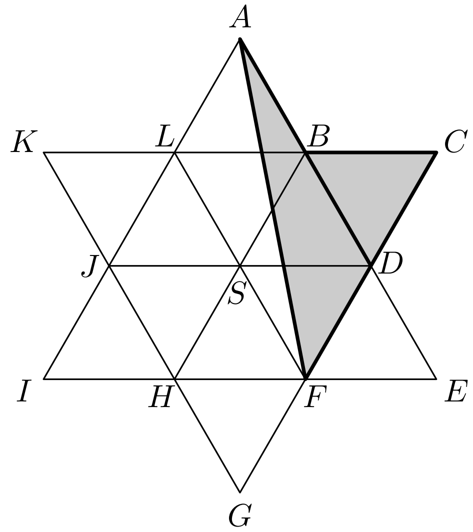
---

3. *Pravidelná šesťcípa hviezda $ABCDEFGHIJKL$ so stredom S, znázornená na obr. 1, vznikla zjednotením dvoch rovnostranných trojuholníkov, z ktorých každý mal obsah $72\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítaj obsah štvoruholníka $ABCF$.* (S. Bednářová)



Obr. 1

Riešenie. Hviezda je súmerná podľa šiestich osí súmernosti, súmerný podľa tých istých osí musí byť aj šesťuholník $BDFHJL$. Z toho vyplýva, že má všetky strany rovnako dlhé, všetky vnútorné uhly rovnako veľké, a že je tým pádom pravidelný. Do obr. 2 ešte doplníme úsečky LS, BS, DS, FS, HS a JS, ktoré tento pravidelný šesťuholník rozdeľujú na šesť zhodných rovnostranných trojuholníkov.



Obr. 2

Trojuholníky LAB, BCD, DEF, FGH, HIJ a JKL sú rovnostranné, pretože všetky ich vnútorné uhly majú evidentne veľkosť $60°$. S vyššie spomenutými trojuholníkmi majú vždy spoločnú jednu stranu. Vidíme teda, že sme hviezdu rozdelili celkom na dvanásť zhodných trojuholníkov.

Vypočítame obsah jedného z týchto malých trojuholníkov. Vieme, že každý z pôvodných rovnostranných trojuholníkov (t. j. AEI a CGK) má obsah $72\,\text{cm}^2$. Ďalej vieme, že je každý zložený z deviatich malých trojuholníkov. Jeden malý trojuholník má preto obsah $72 : 9 = 8$ (cm^2).

Štvoruholník $ABCF$ sa dá úsečkou BD rozdeliť na jeden taký malý trojuholník BCD a trojuholník ADF, ktorý je presnou polovicou rovnobežníka $ADFL$ tvoreného štyrmi malými trojuholníkmi (a má teda obsah rovný obsahu dvoch malých trojuholníkov). Spolu dostávame, že obsah štvoruholníka $ABCF$ je rovný obsahu troch malých trojuholníkov, čiže $3 \cdot 8 = 24$ (cm^2).

Návrh hodnotenia. 2 body za zdôvodnené rozdelenie hviezdy na 12 zhodných rovnostranných trojuholníkov alebo analogický poznatok; 2 body za obsah $8\,\mathrm{cm}^2$ jedného malého trojuholníka; 2 body za odvodenie obsahu štvoruholníka $ABCF$.

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.