2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z8*

1. *Priemerný vek rodiny Gebuľových, ktorú tvorí otec, mama a niekoľko detí, je 18 rokov. Otec má 38 rokov a priemerný vek rodiny bez neho je 14. Koľko detí majú Gebuľovci?* (*L. Hozová*)

Riešenie. Počet členov tejto rodiny označme n. Súčet vekov všetkých členov je rovný súčinu priemerného veku rodiny a počtu členov, teda $18 \cdot n$. Rodina bez otca má $n-1$ členov a súčet vekov týchto členov je $14 \cdot (n-1)$. Vieme, že tento súčet je o 38 menší ako súčet vekov všetkých členov. Dostávame teda rovnicu

$$18 \cdot n = 14 \cdot (n-1) + 38,$$

po úprave dostaneme

$$4n = 24,$$
$$n = 6.$$

Celá rodina má 6 členov, Gebuľovci teda majú 4 deti.

Návrh hodnotenia. 2 body za zostavenie rovnice; 2 body za zdôvodnenie tohto zostavenia; 1 bod za vyriešenie rovnice; 1 bod za správny záver.

Iné riešenie. Ak neberieme do úvahy, že medzi deťmi a rodičmi musí byť určitý vekový rozostup, môžeme si po prečítaní prvej vety zo zadania predstaviť rodinu, ktorú tvoria iba 18-roční členovia. Po prečítaní druhej vety môžeme svoju predstavu upraviť a v rodine vidieť 38-ročného otca a zvyšok členov 14-ročných. Vek otca sme pritom zvýšili o 20, vek ostatných členov znížili vždy o 4. Aby pri úprave našej predstavy zostal súčet vekov všetkých členov rodiny rovnaký, musí byť počet členov rodiny bez otca $20 : 4 = 5$. Jedným z nich je mama, deti tak musia byť 4.

Návrh hodnotenia. 6 bodov.

2. *Koľko existuje šesťciferných prirodzených čísel deliteľných bezo zvyšku* 45 *takých, ktoré majú na mieste stotisícok číslicu* 1*, na mieste tisícok číslicu* 2 *a na mieste desiatok číslicu* 3*?* (*L. Šimůnek*)

Riešenie.

Číslo je deliteľné číslom 45 práve vtedy, keď je deliteľné číslami 5 aj 9. Na mieste jednotiek teda musí byť číslica 0 alebo 5 a jeho ciferný súčet musí byť násobkom deviatich.

Najskôr určíme počet hľadaných čísel, ktoré majú na mieste jednotiek číslicu 0. Tieto čísla označíme ako $\overline{1A2B30}$ a ich ciferný súčet je potom rovný $6 + A + B$. Ak má byť tento súčet násobkom deviatich a ak prihliadneme na to, že neznáme A a B označujú nejaké číslice od 0 po 9, môže byť ciferný súčet rovný buď 9, alebo 18. V prvom prípade platí $A + B = 3$, v druhom $A + B = 12$. Nasledujúce tabuľky ukazujú, koľko možno nájsť dvojíc číslic dávajúcich súčet 3, resp. 12:

A	3	2	1	0
B	0	1	2	3

A	9	8	7	6	5	4	3
B	3	4	5	6	7	8	9

Čísel tvaru $\overline{1A2B30}$ deliteľných číslom 45 teda existuje $4 + 7 = 11$.

Teraz určíme počet hľadaných čísel, ktoré majú na mieste jednotiek číslicu 5. Tie označíme ako $\overline{1C2D35}$ a ich ciferný súčet je potom $11+C+D$. Podobne ako v predošlej časti úlohy zisťujeme, že buď musí platiť $C+D = 7$, alebo $C+D = 16$. Zostavíme opäť tabuľky:

C	7	6	5	4	3	2	1	0
D	0	1	2	3	4	5	6	7

C	9	8	7
D	7	8	9

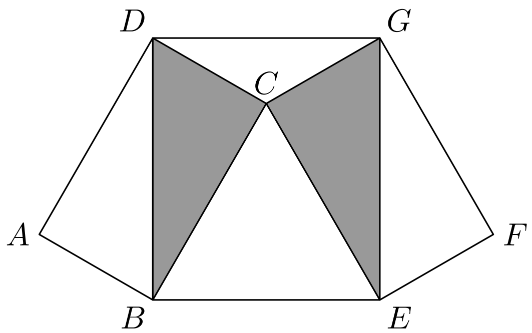
Čísel tvaru $\overline{1C2D35}$ deliteľných číslom 45 teda existuje $8+3 = 11$. Čísel prislúchajúcich zadaniu je celkom $11 + 11 = 22$.

Poznámka. Žiaci tiež môžu na začiatku rozdeliť hľadané čísla do skupín s ciferným súčtom 9, 18 a 27. V skupine s ciferným súčtom 9 môže byť na mieste jednotiek iba číslica 0, v skupine s ciferným súčtom 27 môže byť na mieste jednotiek iba číslica 5 a v skupine s ciferným súčtom 18 môžu byť na mieste jednotiek obe tieto číslice.

Návrh hodnotenia. 1 bod za podmienku deliteľnosti číslom 45; 1 bod za rozdelenie hľadaných čísel do skupín; 4 body za správne určenie čísel v každej skupine.

---

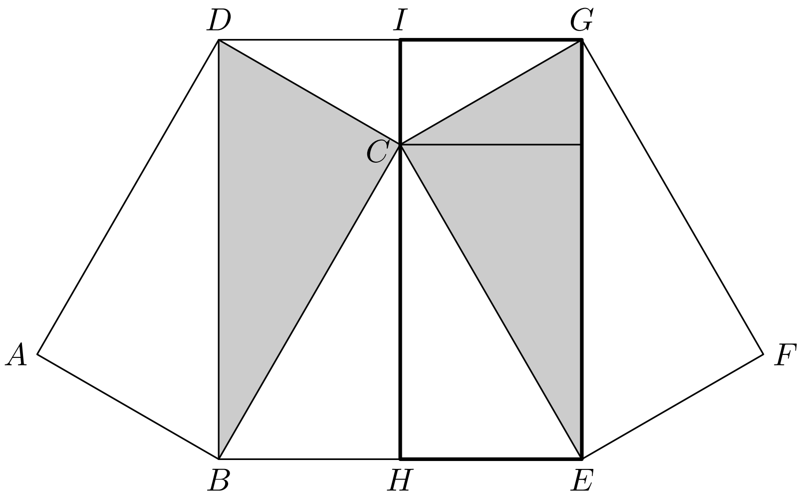
3. *Na obr. 1 je šesťuholník $ABEFGD$. Štvoruholníky $ABCD$ a $EFGC$ sú zhodné obdĺžniky a štvoruholník $BEGD$ je tiež obdĺžnik. Určte pomer obsahov bielej a sivej časti šesťuholníka, ak $|AB| = 5\,\text{cm}$ a trojuholník BEC je rovnostranný.*



Obr. 1

(*K. Pazourek*)

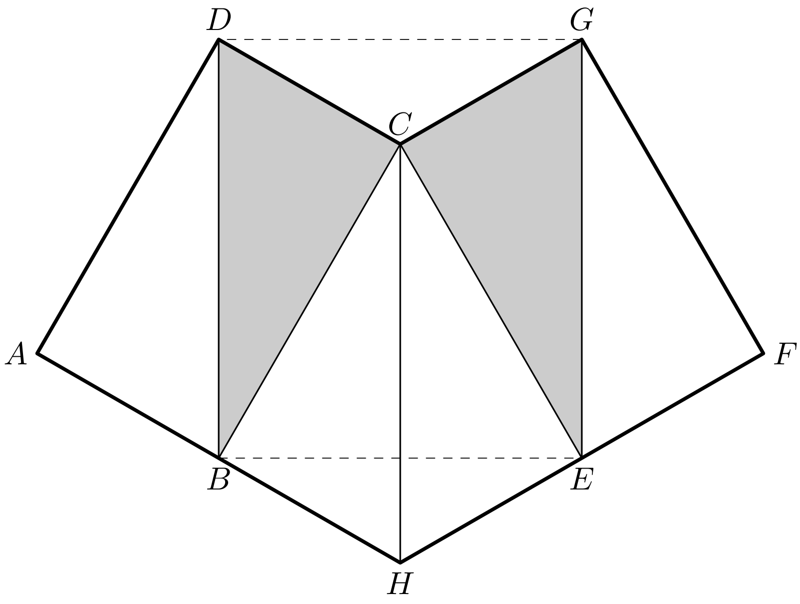
Riešenie. Označme stredy úsečiek BE a GD postupne H a I. Potom obdĺžnik $HEGI$ tvorí polovicu obdĺžnika $BEGD$ a bod C leží na jeho strane HI. Tento obdĺžnik ešte rozdelíme kolmicou spustenou z bodu C (obr. 2).



Obr. 2

Teraz je zrejmé, že pomer bielej a sivej plochy v obdĺžniku $HEGI$ je $1:1$. Trojuholníky CGE a EFG sú zhodné, a preto sú obsahy bielych a sivých plôch v päťuholníku $HEFGI$ v pomere $2:1$. Celý obrázok je symetrický podľa osi HI, takže pomer obsahov bielych a sivých častí šesťuholníka $ABEFGD$ je tiež $2:1$.

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj vhodným posunutím trojuholníka DGC a následným rozdelením vzniknutého útvaru na šesť zhodných trojuholníkov (obr. 3).



Obr. 3

Návrh hodnotenia. 5 bodov za správny a zdôvodnený postup; 1 bod za výsledok.

Iné riešenie. Keďže trojuholník BEC je rovnostranný, sú všetky jeho vnútorné uhly $60°$. Odtiaľ vyplýva, že v trojuholníku CDB merajú vnútorné uhly $30°$, $90°$ a $60°$, preto je tento trojuholník polovicou rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky $2 \cdot |CD| = 2 \cdot |AB| = 10\,\text{cm}$. Takže $|BD| = 10\,\text{cm}$ a z Pytagorovej vety spočítame dĺžku strany BC v trojuholníku CDB:

$$|BC| = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\,(\text{cm}).$$

Obsah trojuholníka CDB je teda rovný

$$S_{CDB} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5 = \frac{25}{2}\sqrt{3}\,(\text{cm}^2).$$

Rovnaký obsah majú aj trojuholníky ABD, CGE a FEG, pretože sú s trojuholníkom CDB zhodné. Keďže trojuholník je BEC rovnostranný, $|BE| = |BC|$ a spočítame obsah obdĺžnika $BEGD$:

$$S_{BEGD} = |BE| \cdot |BD| = 5\sqrt{3} \cdot 10 = 50\sqrt{3}\,(\text{cm}^2).$$

Potom obsah bielej časti šesťuholníka $ABEFGD$ je

$$\begin{aligned} S_{\text{biela}} &= S_{ABD} + (S_{BEGD} - S_{CDB} - S_{CGE}) + S_{FEG} = \\ &= S_{CDB} + (S_{BEGD} - S_{CDB} - S_{CDB}) + S_{CDB} = \\ &= S_{BEGD} = 50\sqrt{3}\,(\text{cm}^2). \end{aligned}$$

Obsah sivej časti šesťuholníka $ABEFGD$ je

$$S_{\text{sivá}} = S_{CDB} + S_{CGE} = 2 \cdot S_{CDB} = 25\sqrt{3}\,(\text{cm}^2).$$

Preto pomer obsahov bielych a sivých častí šesťuholníka je

$$S_{\text{biela}} : S_{\text{sivá}} = 50\sqrt{3} : 25\sqrt{3} = 2 : 1.$$

Návrh hodnotenia. 1 bod za výpočet dĺžky úsečky BC; po 1 bode za výpočty obsahov trojuholníka CDB a obdĺžnika $BEGD$; po 1 bode za stanovenie obsahov sivých a bielych častí; 1 bod za spočítanie pomeru obsahov bielej a sivej plochy (jednotlivé výpočty musia byť zdôvodnené).

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.