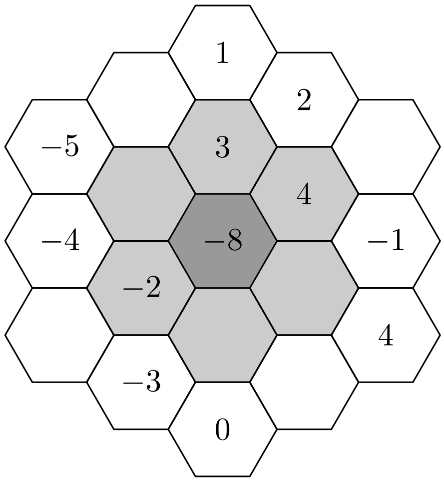
2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z9*

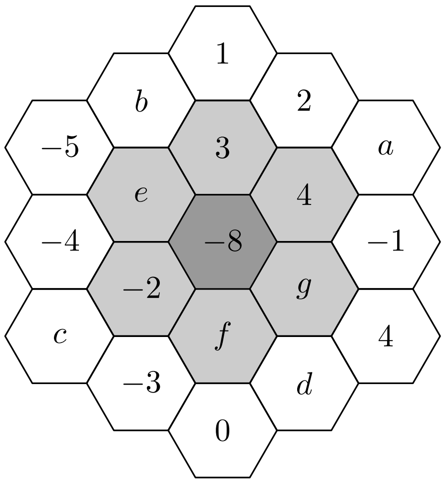
1. *Doplňte do prázdnych políčok na obr. 1 čísla tak, aby v každom políčku bol súčet čísel zo všetkých s ním priamo susediacich políčok, ktoré sú svetlejšie ako dopĺňané. To znamená, že vo svetlosivom políčku je súčet čísel zo susedných bielych políčok, a v tmavosivom políčku je súčet čísel zo susedných svetlosivých políčok.*



Obr. 1

(*S. Bednářová*)

Riešenie. Dopĺňané čísla označme a až g ako na obr. 2.



Obr. 2

Číslo na každom svetlosivom políčku je súčtom troch čísel na bielych políčkach. Ak z takej štvorice čísel chýba len jediné, určíme ho ľahko:

$$a = 4 - (-1) - 2 = 3,$$
$$b = 3 - 2 - 1 = 0,$$
$$c = -2 - (-4) - (-3) = 5.$$

Po zistení čísla b poznáme všetky tri čísla potrebné na doplnenie čísla e:

$$e = 0 + (-5) + (-4) = -9.$$

Čísla f a g sú obe závislé od čísla d a pomocou neho ich vyjadríme:

$$\begin{aligned} f &= -3 + 0 + d = d - 3, \\ g &= d + 4 + (-1) = d + 3. \end{aligned}$$

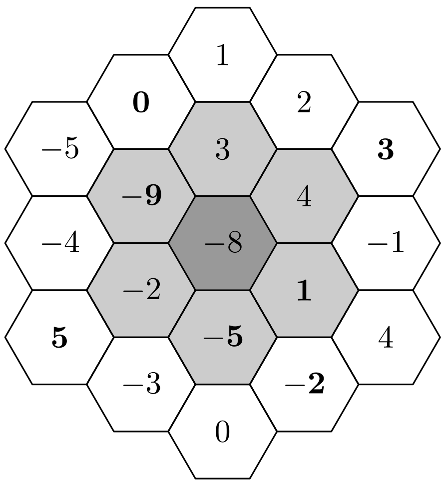
Číslo na tmavosivom políčku je rovné súčtu čísel na šiestich svetlosivých políčkach. Tak dostávame rovnicu s jedinou neznámou:

$$\begin{aligned} -8 &= 4 + 3 + (-9) + (-2) + (d - 3) + (d + 3), \\ -8 &= -4 + 2d, \\ d &= -2. \end{aligned}$$

Dosadením za d určíme hodnotu čísel f a g:

$$\begin{aligned} f &= d - 3 = -2 - 3 = -5, \\ g &= d + 3 = -2 + 3 = 1. \end{aligned}$$

Obrázok teda možno vyplniť číslami jediným spôsobom a ten je znázornený na obr. 3.



Obr. 3

Návrh hodnotenia. 2 body za čísla a, b, c, e (ak je jedno z nich zle, dajte 1 bod, ak sú dve z nich zle, dajte 0 bodov); 2 body za príslušné zdôvodnenie pri dopĺňaní čísel d, f, g; 1 bod za určenie jedného z čísel d, f, g; 1 bod za určenie oboch zvyšných čísel z tejto trojice.

2. *Šárka naplnila pohár a hrnček, ktorý mal dvakrát väčší objem ako pohár, vodou s džúsom. Pomer vody a džúsu bol v pohári* $2:1$ *a v hrnčeku* $4:1$. *Potom preliala obsah pohára i obsah hrnčeka do džbánu. Aký bol pomer vody a džúsu v džbáne?*

(*L. Hozová*)

Riešenie. Ak označíme objem pohára V, tak podľa zadania bolo v pohári $\frac{2}{3}V$ vody a $\frac{1}{3}V$ džúsu. Objem hrnčeka bol dvakrát väčší ako objem pohára, teda $2V$. Vody v ňom bolo $\frac{4}{5}\cdot 2V = \frac{8}{5}V$ a džúsu v ňom bolo $\frac{1}{5}\cdot 2V = \frac{2}{5}V$. Objem vody v džbáne potom bol

$$\frac{2}{3}V + \frac{8}{5}V = \frac{10+24}{15}V = \frac{34}{15}V.$$

Objem džúsu v džbáne bol

$$\frac{1}{3}V + \frac{2}{5}V = \frac{5+6}{15}V = \frac{11}{15}V.$$

Hľadaný pomer vody a džúsu v džbáne bol $\frac{34}{15}V : \frac{11}{15}V$, t. j. po skrátení $34:11$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za vyjadrenie objemov v jednej nádobe; 2 body za vyjadrenie objemov v druhej nádobe pomocou rovnakej neznámej ako pri prvej nádobe; 2 body za vyjadrenie objemov v džbáne; 1 bod za výsledný pomer.

Poznámka. V prípade pohára a hrnčeka môžeme vyjadrovať len objem jednej zložky. Až v džbáne potrebujeme poznať objem oboch zložiek. Teda môžeme objem druhej zložky určiť odčítaním objemu prvej zložky od celkového objemu zmesi, t. j. napr. $\frac{34}{15}V = 3V - \frac{11}{15}V$.

3. *Dostal som zadané dve dvojciferné prirodzené čísla. Potom som ich obe zaokrúhlil na desiatky. Určite, ktoré čísla som mal zadané, ak viete, že súčasne platí:*

- *rozdiel zaokrúhlených čísiel je rovnaký ako rozdiel pôvodných čísiel,*
- *súčin zaokrúhlených čísiel je o* 184 *väčší než súčin pôvodných čísiel.*

(*L. Šimůnek*)

Riešenie. Prirodzené číslo zaokrúhľujeme na desiatky tak, že k nemu pripočítame vhodné celé číslo od -4 do 5. Ak je rozdiel pôvodných a zaokrúhlených čísel rovnaký, znamená to, že k obom pôvodným číslam sme pri zaokrúhľovaní pripočítali rovnaké číslo, teda že pôvodné čísla majú na mieste jednotiek rovnakú cifru.

Súčin zaokrúhlených čísel má na mieste jednotiek cifru 0. Súčin pôvodných čísel je podľa zadania o 184 menší, teda na mieste jednotiek má cifru 6. Hodnotu tejto cifry ovplyvňuje iba cifra na mieste jednotiek hľadaných čísel. Hľadané čísla preto mohli mať na mieste jednotiek buď cifru 4 ($4\cdot 4 = 16$), alebo cifru 6 ($6\cdot 6 = 36$). Z druhej podmienky v zadaní však jasne vyplýva, že hľadané čísla boli zaokrúhlené nahor. Museli teda končiť cifrou 6.

Ak označíme hľadané čísla ako p a q, tak podľa druhej podmienky v zadaní zostavíme rovnicu

$$(p+4)\cdot(q+4) = pq + 184,$$

ktorú postupne upravíme na tvar

$$\begin{aligned} pq + 4p + 4q + 16 &= pq + 184,\\ 4(p+q) &= 168,\\ p+q &= 42. \end{aligned}$$

Jediné dvojciferné čísla končiace cifrou 6 a vyhovujúce tejto rovnici sú 16 a 26.

Iné riešenie. Rovnakým postupom ako vyššie určíme, že obe hľadané čísla majú na mieste jednotiek cifru 6. Hľadané čísla, podľa zadania dvojciferné, možno zapísať ako $10a+6$ a $10b+6$, pričom a a b predstavujú cifry na mieste desiatok. Čísla majú po zaokrúhlení hodnotu $10a+6+4=10(a+1)$ a $10b+6+4=10(b+1)$. Rovnica podľa druhej podmienky v zadaní potom je

$$(10a+6)\cdot(10b+6)+184=10(a+1)\cdot 10(b+1)$$

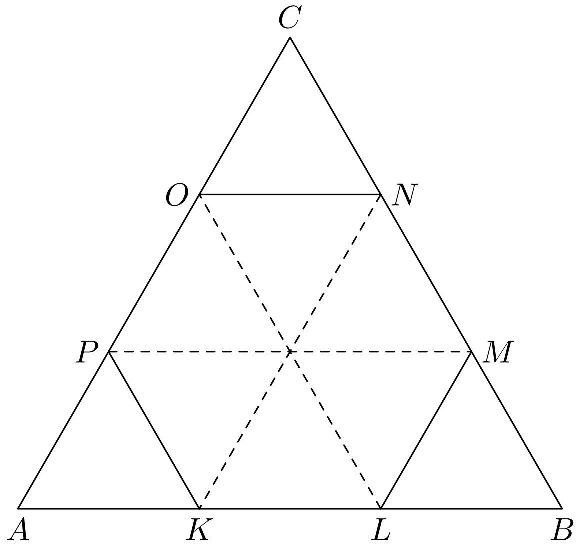
a po úpravách dostaneme $a+b=3$. Neznáme a a b sú cifry na mieste desiatok dvoch hľadaných čísel. Cifru 0 na mieste desiatok nepripúšťa zadanie, pretože čísla majú byť dvojciferné. Súčet 3 tak môžu dať iba cifry 1 a 2 a hľadané čísla sú 16 a 26.

Návrh hodnotenia. 1 bod za poznatok, že hľadané čísla končia rovnakou cifrou; 2 body za zdôvodnenie, že táto cifra je 6; 1 bod za zostavenie rovnice; 2 body za správny záver.

---

4. *Do rovnostranného trojuholníka ABC je vpísaný pravidelný šesťuholník $KLMNOP$ tak, že body K, L ležia na strane AB, body M, N ležia na strane BC a body O, P ležia na strane AC. Vypočítajte obsah šesťuholníka $KLMNOP$, ak obsah trojuholníka ABC je $60\,\mathrm{cm}^2$.* (*K. Pazourek*)

Riešenie. Vpíšme šesťuholník $KLMNOP$ do trojuholníka ABC predpísaným spôsobom.



Obr. 4

Uhol AKP je susedným uhlom uhla PKL. Uhol PKL je vnútorný uhol pravidelného šesťuholníka, t. j. meria $120°$. Veľkosť uhla AKP je teda $180°-120°=60°$. Potom trojuholník AKP je rovnostranný, pretože jeho vnútorné uhly PAK a AKP (a teda aj KPA) merajú $60°$. Rovnakou úvahou možno overiť rovnostrannosť trojuholníkov LBM a ONC.

Ak rozdelíme šesťuholník $KLMNOP$ na šesť zhodných rovnostranných trojuholníkov, zistíme, že sú zhodné s rovnostrannými trojuholníkmi AKP, LBM a ONC (kvôli spoločným stranám PK, LM, NO). Preto majú všetky rovnaký obsah. Šesťuholník sa skladá zo šiestich takýchto trojuholníkov, trojuholník ABC z deviatich, preto pomer ich obsahov je $6 : 9 = 2 : 3$. Teda obsah šesťuholníka $KLMNOP$ je $\frac{2}{3} \cdot 60\,\mathrm{cm}^2 = 40\,\mathrm{cm}^2$.

Návrh hodnotenia. 2 body za vysvetlenie, že trojuholníky AKP, LBM, ONC sú rovnostranné; 2 body za vysvetlenie, že tieto trojuholníky a šesť trojuholníkov tvoriacich šesťuholník sú zhodné; 1 bod za porovnanie obsahov oboch útvarov; 1 bod za výsledok.

Iné riešenie. Najskôr rovnako ako v predchádzajúcom riešení dokážeme, že trojuholníky AKP, LBM, ONC sú rovnostranné. Keďže vždy jedna strana týchto trojuholníkov je stranou pravidelného šesťuholníka $KLMNOP$, trojuholníky AKP, LBM, ONC sú zhodné a platí $|AK| = |KL| = |LB| = \frac{1}{3}|AB|$, t. j. body K, L delia úsečku AB na tretiny. Podobne body M, N (respektíve O, P) delia úsečku BC (respektíve CA) na tretiny.

Označme a dĺžku strany šesťuholníka $KLMNOP$. Potom obsah S_1 tohto šesťuholníka spočítame podľa vzorca

$$S_1 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Obsah rovnostranného trojuholníka ABC je potom

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Odtiaľ vyplýva $S_1 = \frac{2}{3}S_2$, po dosadení $S_1 = \frac{2}{3} \cdot 60\,\mathrm{cm}^2 = 40\,\mathrm{cm}^2$.

Návrh hodnotenia. 2 body za vysvetlenie, že trojuholníky AKP, LBM, ONC sú rovnostranné; 1 bod za zdôvodnenie, že $|KL| = \frac{1}{3}|AB|$; 1 bod za vyjadrenie obsahov oboch útvarov pomocou jednej neznámej; 1 bod za pomer obsahov oboch útvarov alebo analogický poznatok; 1 bod za výsledok.

Iné riešenie. Ďalšia možnosť v podstate kopíruje predchádzajúci postup s tým, že vďaka obsahu daného trojuholníka približne vypočítame všetky potrebné údaje. Všetky výpočty možno urobiť bez kalkulačky.

Najskôr vypočítame zo vzorca pre obsah rovnostranného trojuholníka dĺžku jeho strany:

$$60 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2,$$

odtiaľ $b \doteq 11{,}8\,(\mathrm{cm})$. Analogicky ako v predchádzajúcich riešeniach dokážeme, že trojuholníky AKP, LBM, ONC sú rovnostranné a že body K, L, M, N, O, P delia príslušné strany trojuholníka na tretiny. Potom strana a šesťuholníka $KLMNOP$ meria $a = b : 3 \doteq 3{,}93\,(\mathrm{cm})$. Odtiaľ zo vzorca pre obsah pravidelného šesťuholníka vypočítame obsah $KLMNOP$:

$$S = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \doteq 40{,}1\,\mathrm{cm}^2.$$

Návrh hodnotenia. 1 bod za výpočet dĺžky strany trojuholníka ABC; 2 body za vysvetlenie, že trojuholníky AKP, LBM, ONC sú rovnostranné; 2 body za výpočet dĺžky strany šesťuholníka a zdôvodnenie úvahy; 1 bod za výpočet obsahu šesťuholníka.

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie opravených riešení obvodných kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 22. februára.