

64. ročník Matematickej olympiády, 2014/2015

Úlohy školského kola kategórie B

1. Predpokladajme, že prirodzené číslo a má 15 kladných deliteľov. Koľko ich môže mať prirodzené číslo b , ak najmenší spoločný násobok čísel a a b má 20 kladných deliteľov?
2. Označme P priesečník uhlopriečok konvexného štvoruholníka $ABCD$. Vypočítajte jeho obsah, ak obsahy trojuholníkov ABC , BCD a DAP sú postupne 8 cm^2 , 9 cm^2 , 10 cm^2 .
3. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a , b , c platí

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \leq 3.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

Školské kolo kategórie B sa koná

vo štvrtok 22. januára 2015

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 14. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015