



**64. ročník Matematickej olympiády  
2014/2015**

**Úlohy celoštátneho kola kategórie A**

DRUHÝ SÚŤAŽNÝ DEŇ, 24. MARCA 2015

4. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$a(b^2 + c) = c(c + ab),$$

$$b(c^2 + a) = a(a + bc),$$

$$c(a^2 + b) = b(b + ca).$$

5. Daný je trojuholník  $ABC$ , ktorého každé dve strany sa líšia aspoň o dĺžku  $d > 0$ . Označme  $T$  jeho ťažisko,  $I$  stred kružnice vpísanej a  $\rho$  jej polomer. Dokážte, že

$$S_{AIT} + S_{BIT} + S_{CIT} \geq \frac{2}{3}d\rho,$$

pričom  $S_{XYZ}$  označuje obsah trojuholníka  $XYZ$ .

6. Dané je prirodzené číslo  $n > 2$ . Určte najväčšie celé číslo  $d$ , pre ktoré platí nasledujúce tvrdenie: Z ľubovoľnej  $n$ -prvkovej množiny celých čísel možno vybrať tri rôzne neprázdne podmnožiny tak, že súčet prvkov každej z nich je celočíselným násobkom čísla  $d$ . (Vybrané podmnožiny môžu mať spoločné prvky.)

Na riešenie úloh je 4,5 hodiny, za každú úlohu môžete získať najviac 7 bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť žiadne elektronické prístroje ani žiadne písomné materiály.

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015