

64. ročník Matematickej olympiády, 2014/2015

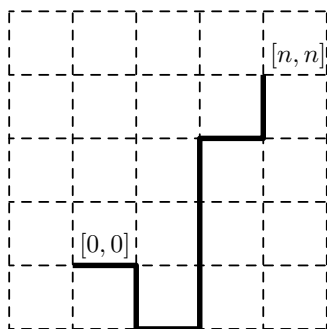
Úlohy celoštátneho kola kategórie A (maďarská verzia)

ELSŐ VERSENYNAP, 2015. MÁRCIUS 23.

- Keressétek meg az összes olyan négyjegyű n számot, amelyre egyszerre érvényes, hogy:
 - az n szám három különböző prímszám szorzata;
 - ezen prímszámok közül a két legkisebb összege megegyezik a két legnagyobb különbségével;
 - ezen három prímszám összege egy (az előzőektől eltérő) prímszám négyzetével egyenlő.
- Az adott n természetes számra határozzátok meg a $[0, 0]$ és $[n, n]$ koordinátájú pontok között vezető $2n + 2$ hosszúságú utak számát, amelyek semmelyik ponton nem haladnak át többször. A $[0, 0]$ és $[n, n]$ koordinátájú pontok között vezető $2n + 2$ hosszúságú út alatt egy $2n + 2$ tagú szomszédos rácspontokat összekötő szakaszok

$$(A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{2n+1}A_{2n+2})$$

szorozatát értjük, amelyre $A_0 = [0, 0]$, $A_{2n+2} = [n, n]$.



- Egy tetszőleges ABC háromszögben, amelyben a C csúcshoz tartozó súlyvonal nem merőleges sem a CA sem a CB oldalra, jelölje rendre X ill. Y ezen súlyvonal tengelyének CA ill. CB egyenesekkel való metszéspontját. Keressétek meg az összes olyan ABC háromszöget, amelyre az A , B , X és Y pontok egy körvonalra illeszkednek.

A feladatok megoldására 4,5 óra áll rendelkezésre. Minden feladatért legfeljebb 7 pont szerezhető. A verseny folyamán tilos az elektronikus eszközök, valamint az írásos jegyzetek használata.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
 Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
 Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki
 Redakčná úprava: Peter Novotný
 Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015

**64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015**

**Úlohy celoštátneho kola kategórie A
(maďarská verzia)**

MÁSODIK VERSENYNAP, 2015. MÁRCIUS 24.

4. A valós számok halmazán oldjátok meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}a(b^2 + c) &= c(c + ab), \\ b(c^2 + a) &= a(a + bc), \\ c(a^2 + b) &= b(b + ca).\end{aligned}$$

5. Adott az ABC háromszög amelyben tetszőleges két oldal hossza között a különbség legalább $d > 0$. Jelölje T a súlypontot, I a beírt kör középpontját, valamint ρ ennek sugarát. Bizonyítsátok be, hogy fennáll:

$$S_{AIT} + S_{BIT} + S_{CIT} \geq \frac{2}{3}d\rho,$$

ahol S_{XYZ} az XYZ háromszög területét jelöli.

6. Adott az $n > 2$ természetes szám. Keressétek meg azt a legnagyobb d egész számot, amelyre érvényes a következő állítás: Tetszőleges n -elemű egész számokból álló halmaznak ki lehet választani három különböző nem üres részhalmazát úgy, hogy mindegyikben az elemek összege a d szám egész számú többszöröse legyen. (A kiválasztott részhalmazoknak lehetnek közös elemeik.)

A feladatok megoldására 4,5 óra áll rendelkezésre. Minden feladatért legfeljebb 7 pont szerezhető. A verseny folyamán tilos az elektronikus eszközök, valamint az írásos jegyzetek használata.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki
Redakčná úprava: Peter Novotný
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015